Problemes Curs de Física	9. Moviment oscil·latori

Problemes recomanats

1 Un transductor ultrasònic (una mena d'altaveu) que s'utilitza en dianosi mèdica oscil·la a una freqüència de 6.7 MHz = 6.7×10^6 Hz. ¿Quant de temps dura cada oscil·lació, i quina és la freqüència angular?

Sol: 0.15 μs, 4.2×10^7 rad/s.

2 Es munta una molla horitzontalment, amb l'extrem esquerre sostingut estacionari. Per mitjà d'una balança unida a l'extrem lliure s'estableix que la força d'estirament és proporcional al desplaçament i que una força de 6.0 N causa un desplaçament de 0.030 m. Es lleva la balança i es fixa un cos de 0.50 kg a l'extrem de la molla, s'estira una distància 0.020 m, i es solta, de manera que oscil·la amb MHS.

(a) Trobeu la constant de força de la molla.
(b) Trobeu la freqüència angular, la freqüència i el periode de l'oscil.lació.

Sol: (a) 200 N/m. (b) 20 rad/s, 3.2 Hz, 0.31 s.

3 La molla del problema anterior té una constant de força 200 N/m i s'hi ha afegit una massa m = 0.50 kg. Ara donem al cos un desplaçament inicial de +0.015 m i una velocitat inicial de +0.40 m/s.

(a) Troba el periode, amplitud i angle de fase del moviment.
(b) Escriu les equacions per al desplaçament, la velocitat i l'acceleració en funció del temps.

Sol: (a) 0.31 s, 0.025 m, -0.93 rad.

4 Una partícula de massa $m = 0.1\,\mathrm{kg}$ experimenta una força restauradora de constant $k = 10\,\mathrm{N/m}$. Si la velocitat inicial és $v_0 = 0.05\,\mathrm{m/s}$ quan la separació de la posició d'equilibri és $x_0 = 0.2\,\mathrm{m}$, quina serà l'amplitud de les oscil.lacions?

5 En t=0, el desplaçament $x(0)$ del bloc d'un oscil·lador harmònic simple és de -8.5 cm. La seua velocitat $v(0)$ és de -0.92 m/s. La massa del bloc és m=20g, i la constant del moll k=11N/m. Calculeu l'amplitud del moviment i l'angle de fase.

Sol: A = 9.38 cm. ϕ=155º.

6 Un bloc de massa m=680 g està acoblat a un moll de constant k=65N/m. Es desplaça el bloc una distància x=11 cm de la seua posició d'equilibri, deixant-lo anar des del repòs.

(a) ¿Quines són la freqüència angular, la freqüència i el període de l'oscil·lació?
(b) ¿Quina és l'amplitud de l'oscil·lació?
(c) ¿Quina és la màxima acceleració que assoleix el bloc?
(d) ¿Quin és l'angle de fase ϕ del moviment?

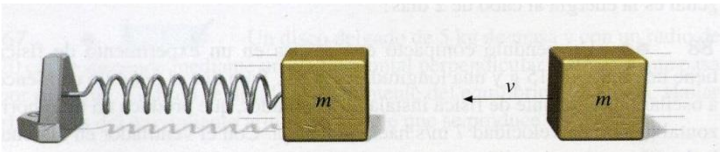
Sol: (a) 9.78 rad/s, 1.56 Hz, 0.640 s. (b) 11 cm.
(c) 1.1 m/s, 11 m/s^2. (d) ϕ=0.

7 Un punt material està dotat d'un moviment harmònic simple d'amplitud A=1m i $\omega=\pi$ rad s^{-1}. Es demana:

a) El seu període i freqüència.
b) La llei del moviment sabent que l'origen de temps es compta quan el mòbil passa per la seua posició mitjana cap al sentit positiu.
c) La velocitat i acceleració en un instant.
d) El temps mínim necessari perquè l'elongació valga -0.5m.
e) La velocitat màxima que pot adquirir el mòbil.

Sol: a) T=2 s. ; ν=0.5 Hz.
b) $x = A\sin\omega t$; c) $v = A\omega\cos\omega t$, $a = -\omega^2 x$.
d) t=1.83 s; e) v= π m s^{-1}.

8 El bloc de l'esquerra de massa m = 0. 1 kg es troba unit a un moll de constant k = 0.9 N/m, i en repòs. Un altre bloc de la mateixa massa impacta en una col·lisió totalment inelàstica a velocitat v = 0.3 m/s. ¿Quina és l'amplitud de les oscil·lacions després del xoc?

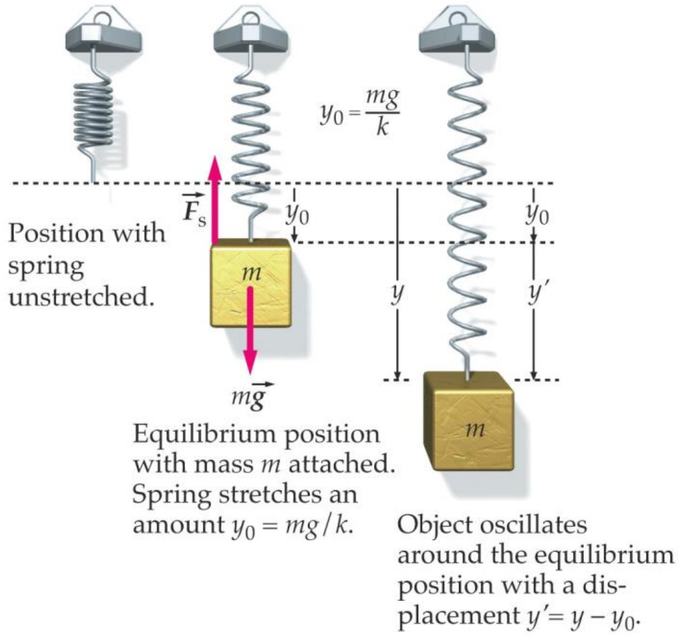


9 Una balança amb un plat de 100g oscil·la amb una freqüència de 0.5 Hz. Calcula la freqüència d'oscil·lació si es col·loca damunt un peix de 1kg.

10 Un resort de massa insignificant que no obeeix la llei de Hook, exerceix una força restauradora $F = -\alpha x - \beta x^2$ quan s'estira o comprimeix. S'uneix una massa de 800 g al resort, s'estira 1 m i s'amolla en t = 0 des del repòs. Prenent α = 70.0 N/m i β = 12.0 N/m^2 calculeu:

a) La velocitat de l'objecte en x=0.5 m
b) La funció d'energia potencial de F.

11 Una massa m penja d'un moll de constant k, enganxat al sostre. Escriu l'equqació de moviment per a la coordenada y. Demostra que per a la coordenada y' s'obté un moviment harmonic simple.



12 Troba el periode i la freqüència d'un pèndol simple de 1.000 m de llarg en un lloc on g = 9.800 m/s^2.

Sol: T = 2.007 s, f = 0.4983 Hz.

13 Un tub en forma de U conté un únic fluid homogeni. Es desplaça el líquid temporalment en un costat amb un pistó. Es lleva el pistó i el nivell del líquid en cada costat oscil·la. Demostra que el periode de les oscil·lacions és $\pi\sqrt{2L/g}$, on L és la longitud total del líquid en el tub.

14 Un pèndol físic consisteix en una barra uniform de longitud L que penja d'un extrem. Calcula el periode del moviment.

Sol: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2L}{3g}}$

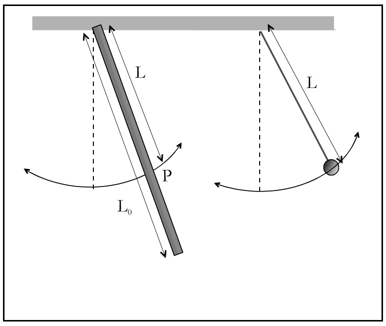
15 Una barnilla de massa m i longitud L_0 , suspesa d'un dels seus extrems, oscil·la com un pèndol físic.

(a) Calculeu la longitud L d'un pèndol simple que tinga el mateix període.

Ara invertim la barnilla suspenent-la des del punt P.

(b) ¿Quin serà el seu període d'oscil·lació?

Sol: (a) $L = \dfrac{2}{3}L_0$. (b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2L_0}{3g}}$



16 Es penja un disc de massa M i radi r de la seua vora. Troba el periode de les seues oscil·lacions menudes.

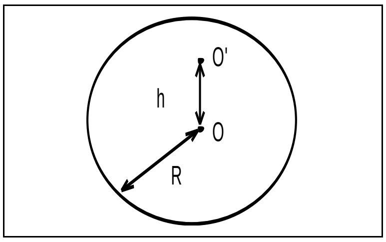
Sol: $2\pi\sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{r}{g}}$

17 Un disc sòlid de radi R pot penjar-se d'un eix horitzontal a una distància h del seu centre.

a) Trobeu la posició de l'eix perquè el període siga mínim.

b) Representeu el període en funció de h.

Sol: a) $h=R/\sqrt{2}$.



18 Una molla hipotètica té una força restauradora representada per

$$F(x) = a\cos(\beta x)$$

sent a i β constants.

Trobeu, al voltant del primer punt d'equilibri per a $x > 0$ i la freqüència de les oscil·lacions de petita amplitud al voltant d'aquest punt.

Sol: $\omega = \sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{m}}$

19 El potencial que actua sobre una partícula de massa m te la forma:

$$V = \frac{a}{x^5} - \frac{b}{x^3}$$

Amb a i b constants positives.

a) Calculeu la força que actua sobre la partícula.

b) Dibuixeu el potencial.

c) Descriviu els tipus de moviment possibles.

d) Calculeu el període de les oscil.lacions d'amplitud menuda al voltant del punt d'equilibri estable.

Nota: Considereu només valors de x>0.

20 Donat el potencial:

$$U = \frac{k}{x} + cx$$

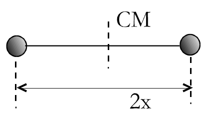
a) Calculeu la força
b) Dibuixeu el potencial
c) Calculeu la freqüència de les les oscil.lacions de petita amplitud al voltant del mínim.

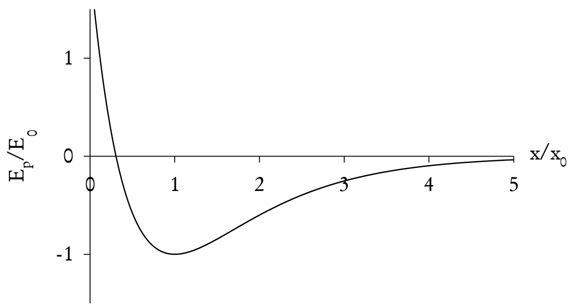
21 Donat el potencial:

$$U = U_0\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)$$

Representa el potencial
Calcula la freqüència de les oscil.lacions de petita amplitud al voltant del mínim.

22 La figura mostra l'energia potencial d'un àtom en una molècula d'hidrogen.





La coordenada *x* representa la posició de cada àtom respecte al centre de masses de la molècula. La distància entre els dos àtoms és així 2*x* en qualsevol instant.

L'expressió matemàtica de l'energia potencial té la forma

$$U = U_0\left(e^{-2(x-x_0)/a} - 2e^{-(x-x_0)/a}\right)$$

on a és una constant. La corba té un mínim amb valor $U = -U_0$ en $x = x_0$. Per tant, la distància d'equilibri de la molècula és $2x_0$, i la quantitat U_0 representa el treball que s'ha de fer per a separar dos àtoms que es troben inicialment en la situació d'equilibri, és a dir, l'energia de dissociació. Quan la molècula té una certa energia major (però no molt més gran) que U_0, efectuarà oscil·lacions harmòniques al voltant del punt d'equilibri, $x = x_0$.

Per a la molècula diatòmica representada en la figura:

a) Calculeu i representeu la força que actua sobre un àtom en funció de la posició *x*.
b) Per a vibracions menudes al voltant del punt d'equilibri, el sistema es comporta com dues masses unides per un moll. Trobeu la constant *k* de l'oscil·lador, i la freqüència angular de les oscil·lacions.

23 Una aproximació a la molècula de KCl és

$$U = A\left[\frac{R_0{}^7}{8r^8} - \frac{1}{r}\right]$$

on R_0 =2.67 × 10^{-10} m i A = 2.31 × 10^{-28} J·m. Utilitzeu esta expressió per a:

(a) Calcular el component radial de la força sobre cada àtom.
(b) Calcular la separació d'equilibri entre els àtoms.
(c) Calcular l'anergia potencial màxima (energia de dissociació).
(d) Utilitzant r = R_0 + x, i els dos primers termes del teorema del binomi [$(1 + u)^n = 1 + nu + n(n - 1)u^2/2!+...$), per a trobar k en l'expressió aproximada F = -kx, vàlida per a petites oscil·lacions.

24 Dos àtoms d'argó formen una molècula feblement lligada, Ar_2, que es manté unida per una interacció de van der Waals, descrita per la funció d'energia potencial

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^6\right]$$

amb $U_0 = 1.68\times10^{-21}$ J i $R_0 = 3.82\times10^{-10}$ m.

(a) Calcula la constant de força per a oscil·lacions menudes.
(b) Troba la freqüència de vibració dels àtoms. La massa atòmica mitjana de l'argó és 39.948 u.

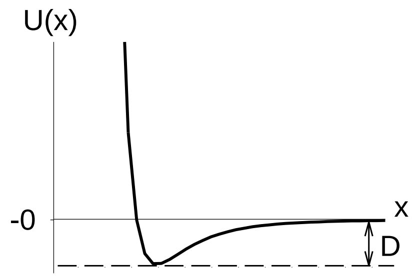
Sol: (a) 0.829 N/m. (b) 7.96×10^{11} Hz.

25 El potencial que correspon a la força entre dos àtoms d'una molècula diatòmica, anomenada potencial de Lenard-Jones, te la següent forma

$$\mathrm{U}(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

Amb a i b constants positives.

a) Troba la distància d'equilibri x_0.
b) Dibuixa el potencial.
c) ¿Quina és l'energia de dissociació D de la molècula?
d) Descriviu els tipus de moviment possibles.
e) Calcula el període de les oscil.lacions d'amplitud menuda al voltant del punt d'equilibri.



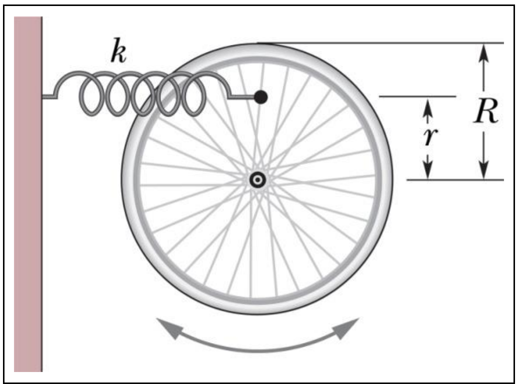
26 Una partícula de massa *m* es mou baix la influència del potencial en el eix *x*

$$U(x) = -U_0 \frac{a^2}{a^2 + x^2}$$

Amb a i U_0 constants positives.

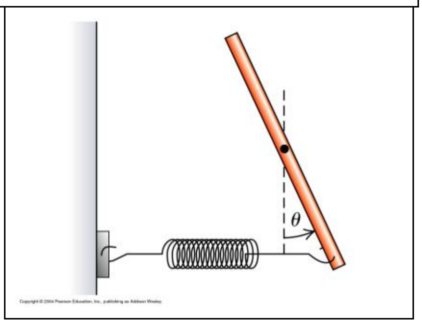
a) Troba la distància d'equilibri x_0.
b) Dibuixa el potencial.
c) ¿Quina és l'energia de lligadura?
d) Calcula el període de les oscil.lacions d'amplitud menuda al voltant del punt d'equilibri.

27 Una roda pot rodar lliurement al voltant del seu eix fix. S'uneix un moll a un dels radis, a una distància *r* de l'eix, com es mostra en la figura. (a) Suposa que la roda és un cercle de radi *R* i massa *m*, i troba la freqüència ω de les oscil·lacions menudes d'este sistema en termes de *R, r, m,* i la constant del moll, *k*. ¿Que val ω si (b) $r = R$ i (c) $r = 0$?



28 Una vareta metàl.lica prima i uniform amb massa M i longitud *L*, pivota sense fricció per un eix que pasa pel seu punt mig. Un ressort horitzontal, amb constant de força *k*, es con.necta a l'extrem inferior de la vareta, i l'altre extrem es fixa a un suport rígid. La vareta es desplaça un angle menut θ_0 respecte a la vertical, i es solta.

(a) Demostra que es tracta d'un moviment harmònic simple.
(b) Calcula la freqüència de les oscil.lacions.



29 Siga un oscil·lador subamortit amb *m*=250g, *k*=85N/m, i *b*=70g/s. Trobeu:

(a) El període del moviment.
(b) El temps de relaxació $\tau = m/b$.
(c) El temps que tarda l'amplitud de les oscil·lacions en reduir-se a la meitat del seu valor inicial.
(d) El temps que tarda l'energia mecànica en reduir-se a la meitat del seu valor inicial.

Sol: (a) 0.341 s. (b) 7.14 s. (c) 4.95 s. (d) 2.48 s.

30 Un pèndol simple te una amplitud de 2º i un període de 2s. Si després de 10 oscil.lacions l'amplitud s'ha reduït a 1.5º, calculeu la constant de temps τ. ¿Quin és el percentatge d'energia que s'ha perdut en aquest interval de temps?

31 Un pèndol simple de 56 cm de llarg te una amplitud inicial de 3.0º i un factor de qualitat 40π .
(a)¿ Com s'ha reduit l'amplitud inicial despres de 10 oscil·lacions? Doneu l'amplitud final en m.
(b)¿Quin és el percentatge d'energia que s'ha perdut en aquest interval de temps?

32 Una bola esfèrica de radi R = 0.30 cm i massa 0.5 g es mou en aigua sota l'acció d'un moll de constant k = 50 dines/cm. La força d'arrossegament de l'aigua sobre la bola ve donada per l'expressió

$F=6\pi\eta Rv$

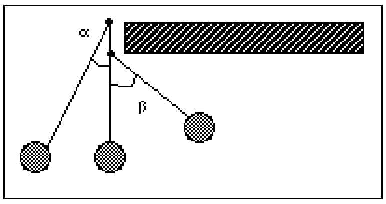
si η és la viscositat, que per a l'aigua és 1.0×10^{2} dina-s/cm^{2} o poises, i v és la velocitat de la bola respecte de l'aigua.

Determineu el nombre d'oscil·lacions que tindran lloc en el temps necessari perquè l'amplitud baixe a la meitat del valor inicial.

Sol: 19.6 oscil.lacions

Material auxiliar

33 En el pèndol de la figura, quan oscil·la cap a la dreta, la seua longitud es redueix a 3/4 de la seua longitud total. Determineu l'expressió que relaciona les amplituds dels angles α i β d'oscil·lació. Es suposa que no hi ha fricció.



Sol: $[(1-\cos\alpha)/(1-\cos\beta)]=3/4$.

34 Una pilota de massa M està rebotant sobre una taula; hi fa xocs perfectament elàstics i arriba a una altura màxima H sobre la taula. Evidentment, el moviment és periòdic.

a) Calculeu-ne la freqüència.
b) ¿És un moviment harmònic simple?
c) Calculeu la constant elàstica k d'una molla que té la mateixa massa i el mateix període que la pilota.

Sol: a) $\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{2H}\right)^{1/2}$; b) No; c) $k = \frac{\pi^2}{2}\frac{gM}{H}$

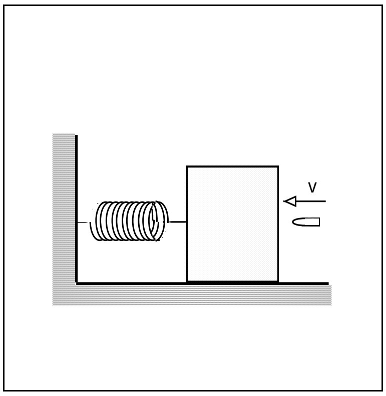
35 Un resort de massa insignificant que no obeeix la llei de Hook, exerceix una força restauradora $F = -\alpha x - \beta x^2$ quan s'estira o comprimeix. S'uneix una massa de 800 g al resort, s'estira 1 m i s'amolla en t = 0 des del repòs. Prenent $\alpha = 70.0$ N/m i $\beta = 12.0$ N/m^2 calculeu:

La velocitat de l'objecte en x=0.5 m
La funció d'energia potencial de F.

Nota: suposeu que el fregament és zero.

36 Una bala amb massa 10 g i que es mou amb una velocitat de 400 ms^{-1} s'encasta contra el bloc de la figura, que pesa 990 g. Després del xoc, el moll es contrau 20 cm, i realitza un moviment harmònic simple si no hi ha fregament entre el bloc i el sòl. Es demana:

a) La constant recuperadora de la molla.
b) El període d'oscil·lació.
c) Si hi ha fregament entre el bloc i el sòl, sent el coeficient de fregament μ=0.12, ¿quina seria ara la màxima contracció del moll?

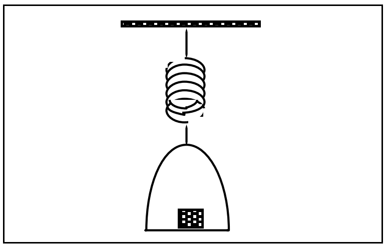


Sol: a) k=400 N m^{-1}. b) T=0.31 s. c) x=19.7 cm.

37 Una planxa horitzontal oscil·la lateralment amb moviment harmònic simple amb una amplitud d'1.5 m i una freqüència de 15 oscil·lacions per minut. Calculeu el valor mínim del coeficient de fregament perquè un cos col·locat sobre la planxa no rellisque quan aquesta es moga.

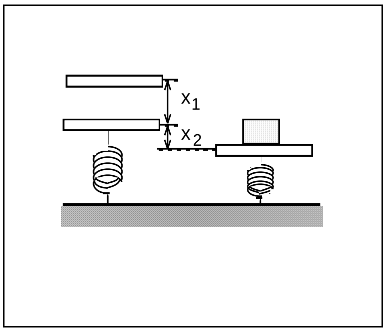
Sol: μ=0.38.

38 De l'extrem inferior d'un resort vertical de constant k hi ha suspès un platet de massa negligible sobre el qual resta un objecte de massa m. Aleshores es comunica un moviment oscil·latori, d'amplitud A i freqüència angular ω, al platet. Determineu el màxim valor que pot assolir l'amplitud A perquè l'objecte no salte sobre el platet.



39 Es deixa caure un bloc de m = 10 kg. des d'una altura h = 2 m sobre el plat de M = 10 kg d'una bàscula el moll del qual té una constant elàstica $k = 8\times10^3$ Nm^{-1}. Inicialment, el moll està contret a causa del pes del plat. Si suposem que a partir de la col·lisió el bloc i el plat queden firmement adherits, trobeu:

a) El desplaçament màxim del plat.
b) La llei del moviment del conjunt bloc-plat.



Sol: a) x_2=17 cm. b) x(t)=15.75 sin(20t).

40 Calculeu la massa reduida μ, donada per

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

per als següents sistemes:

(a) Electró-protó en un àtom d'hidrogen.
(b) Molècula de CO formada per ^{12}C i ^{16}O.

En cada cas compareu el resultats amb la massa de la partícula més lleugera. Els valors de les masses són: $m_e = 9.109\times10^{-31}$ kg, $m_p = 1.6726\times10^{-27}$ kg, $m(^{12}\mathrm{C})$=12.00 u, $m(^{16}\mathrm{O})$=15.98 u.

Sol: (a) 9.103×10^{-31} kg. (b) 6.85 u=11.38×10^{-27} kg.

41 Considerem un sistema de dos cossos units per una molla, amb massa reduida μ donada per

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

(a) Demostra que si $m_2 \to \infty$, $\mu \to m_1$.
(b) Demostra que l'efecte d'una paret no infinita ($m_2 < \infty$) sobre les oscil·lacions d'una massa m_1 al final d'una molla unida a una paret és reduir el periode, o incrementar la freqüència, de les oscil·lacions, comparat amb (a).
(c) Demostra que quan $m_2 = m_1$ l'efecte es com tallar la molla per la meitat, amb cada massa oscil·lant independentment respecte del centre de masses al mig.

42 ¿Quina és la massa reduïda de la molècula HCl? Aquesta molècula vibra amb una freqüència fonamental de $\nu = 8.7\times10^{13}$ Hz. ¿Quina és la "constant de força" k efectiva per a les forces d'acoblament entre els àtoms? En termes de l'experiència amb molles ordinàries, ¿es diria que aquesta "molla molecular" és rígida o no?

Sol: 480 N m^{-1}

43 Una massa *m* penja verticalment d'una molla sense massa i constant de força *k* en un camp gravitacional uniform.

(a) Demostra que si $x = 0$ marca la posició de l'extrem de la molla sense massa, la posició d'equilibri estàtic és $x = mg / k$.

(b) Demostra que l'equació de moviment del sistema massa-molla és

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

i que la solució per al desplaçament en funció del temps és

$$x = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k}$$

on $\omega = \sqrt{k/m}$.

(c) Ara considera l'energia del sistema,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h - x) = \text{constant}$$

i demostra que la diferenciació respecte del temps condueix a l'equació de moviment de la part (b).

(d) Demostra que quan la massa cau des de $x = 0$ a la posició d'equilibri estàtic, $x = mg / k$, la meitat l'energia gravitacional perduda es coverteix en energia potencial elàstica i l'altra meitat en energia cinètica.