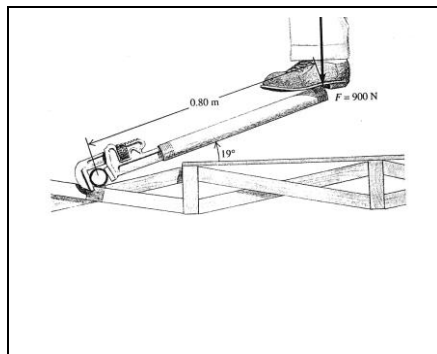


Problemes Curs de física	<h2 style="margin: 0;">6. Moment angular i sòlids rígids</h2>
---------------------------------	---

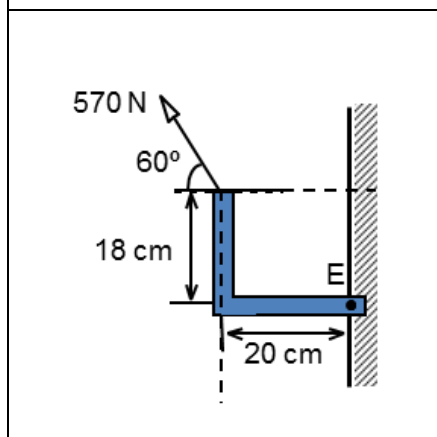
Problemes recomanats

- 1** Un plomaire no pot afluixar una connexió d'un tub amb la seua clau de mordassa, així que li acobla un tros de tub de manera que li allarga el braç fins a 0.8m. Aleshores, li aplica tot el seu pes (900 N) al final del tub mentre aquest i la clau formen un angle de 19° amb l'horitzontal. Trobeu la magnitud i la direcció del moment aplicat sobre el centre de la canonada.



Sol.: 680 N m cap a dins del pla de la figura

- 2** Una força de 570 N actua sobre un suport com s'indica a la figura. Determinem el moment de la força respecte del punt d'encastament del suport en la paret, *E*. Calcula primer el resultat escrivint les magnituds vectorials, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Comprova el resultat calculant directament la magnitud de τ amb projeccions.



- 3** La posició angular del volant d'un motor ve donada per l'expressió

$$\theta = 2.0t^3 \text{ rad}$$

El diàmetre del volant és 0.36 m. Trobeu:

- L'angle, en radians i en graus, als temps $t_1 = 2\text{s}$ i $t_2 = 5\text{s}$.
- La distància que una partícula situada en la vorera recorre entre aquests dos temps
- La velocitat angular mitjana, en rad/s i en revolucions per minut (rpm), entre $t_1 = 2\text{s}$ i $t_2 = 5\text{s}$.
- La velocitat angular instantània en $t = 3\text{s}$.
- L'acceleració angular mitjana entre $t_1 = 2\text{s}$ i $t_2 = 5\text{s}$.
- L'acceleració angular instantània en $t = 3\text{s}$.

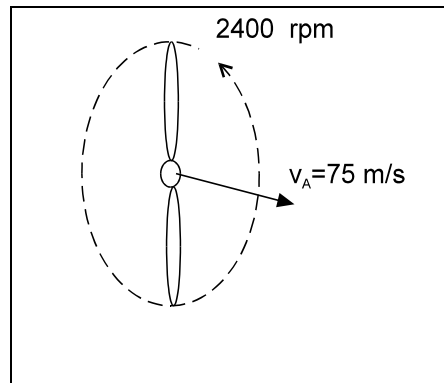
Sol.: a) $\theta_1 = 16 \text{ rad} = 920^\circ$, $\theta_2 = 250 \text{ rad} = 14000^\circ$;
 b) $s = 42 \text{ m}$; c) $\omega_m = 78 \text{ rad/s} = 740 \text{ rpm}$;
 d) $\omega = 54 \text{ rad/s}$; e) $\alpha_m = 42 \text{ rad/s}^2$; f) $\alpha = 36 \text{ rad/s}^2$

- 4 A $t = 0$, el corrent d'un motor elèctric DC s'inverteix, donant com a resultat un desplaçament angular de l'eix del motor igual a $\theta(t) = 250t - 20t^2 - 1.5t^3$.
- ¿En quin moment la velocitat angular de l'eix del motor és zero?
 - Calculeu l'acceleració angular en eixe instant.
 - ¿Quantes voltes ha fet el motor des que s'inverteix el corrent fins que la velocitat angular de l'eix és zero?
 - ¿A quina velocitat angular gira l'eix en $t = 0$?
 - Calculeu la velocitat angular mitjana en el període de temps de l'apartat (c).

- 5 Un llançador de disc gira amb acceleració angular $\alpha = 50 \text{ rad/s}^2$, movent el disc en un cercle de radi $r = 0.8 \text{ m}$. Si modelem el braç del llançador com un cos rígid tal que r és constant, calculeu la magnitud i les components tangencial i centrípeta de l'acceleració del disc en l'instant en què la velocitat angular és 10 rad/s .

$$a = 89 \text{ m/s}^2; a_t = 40 \text{ m/s}^2; a_n = 80 \text{ m/s}^2.$$

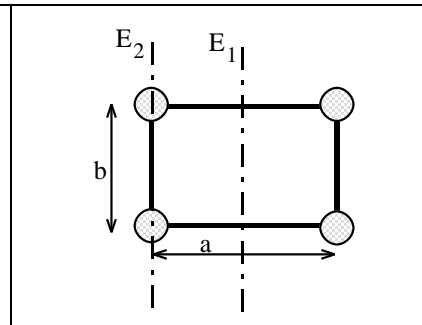
- 6 Heu de dissenyar l'hèlix d'un avió per a girar a 2400 rpm de manera que la velocitat de l'avió respecte de l'aire siga de 75 m/s i les puntes de les pales de l'hèlix no superen els 270 m/s ($= 0.8 v_{so}$, ja que si es mouren a la velocitat del so produirien molt de soroll)



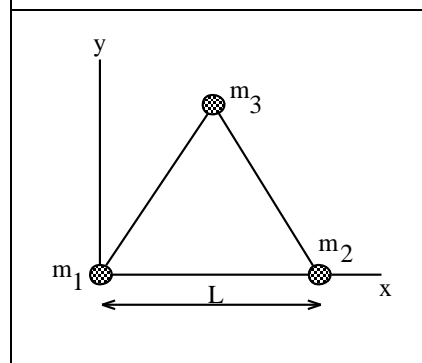
- ¿Quin és el màxim radi que pot tenir l'hèlix?
- Amb eixe radi, ¿quina és l'acceleració de la punta de l'aspa?

Sol.: a) $R = 1.03 \text{ m}$; b) $a_n = 6.5 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$

- 7 Quatre partícules de massa m , unides per varetes de massa negligible, formen un rectangle de costats a i b . Trobeu el moment d'inèrcia respecte dels eixos E_1 i E_2 indicats a la figura, i els respectius radis de gir.

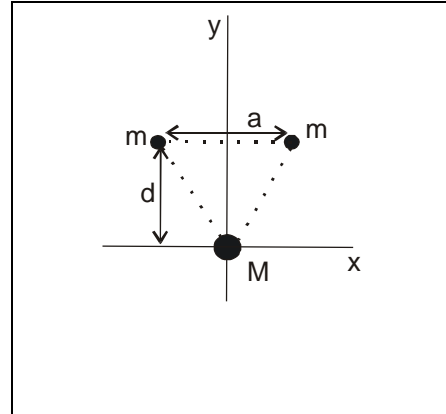


- 8 Tres masses, cadascuna de 2 kg , estan situades en els vèrtex d'un triangle equilàter de costat $L = 10 \text{ cm}$. Calculeu el moment d'inèrcia del sistema, i el radi de gir, respecte d'un eix perpendicular al pla del triangle i que passe per:



- Un vèrtex,
- El punt mig d'un costat,
- El centre de masses.

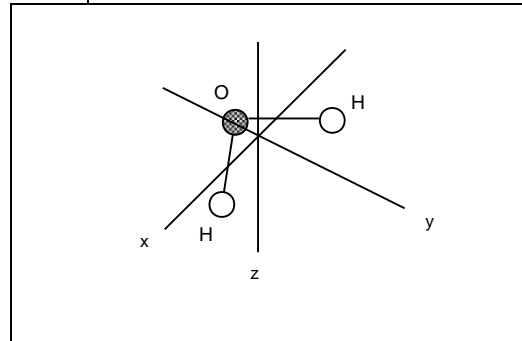
- 9 Una molècula rígida està formada per dos àtoms de massa m i un altre de massa M . Les dimensions (distàncies) a i d s'indiquen a la figura.



- a) Trobeu la posició del centre de masses.
 b) La molècula gira en pla xy , mentre el centre de masses permaneceix en repòs. Si la magnitud de la velocitat de l'àtom de massa M és v_M , ¿quina serà la magnitud de la velocitat dels altres àtoms? Suposa que $M = 4m$ i $a = 0.9d$.

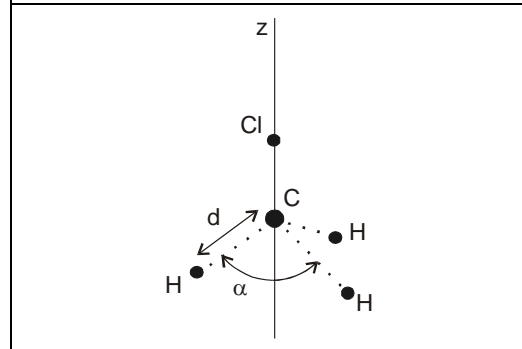
Sol: a) $y_{cm} = 2md / (M + 2m)$. b) $v_m = 2.4v_M$

- 10 En la molècula de H_2O , la distància H-O és de 0.96 \AA , i l'angle entre les unions H-O és de 105° . Determineu els moments d'inèrcia de la molècula respecte als tres eixos mostrats en la figura, que passen a través del centre de masses.



Sol: $I_x = 0.61 \text{ uma \AA}^2$,
 $I_y = 1.16 \text{ uma \AA}^2$,
 $I_z = 1.77 \text{ uma \AA}^2$.

- 11 Calculeu el moment d'inèrcia de la molècula CH_3Cl al voltant de l'eix C-Cl.

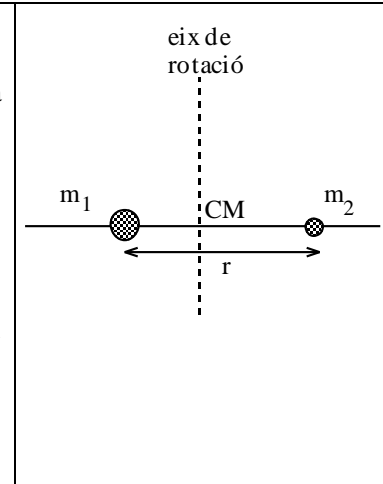


Sol: $I = 2m_H d^2 (1 - \cos \alpha)$

- 12 Demostreu que el moment d'inèrcia d'un sistema constituït per dues masses m_1 i m_2 , separades una distància r , respecte d'un eix que passa pel centre de masses i és perpendicular a la línia que uneix les dues masses, és $I = \mu r^2$, sent μ la massa reduïda del sistema, que es defineix segons

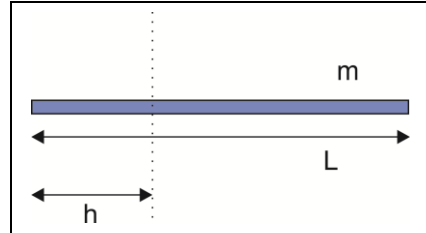
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Apliqueu aquest resultat a la molècula de CO ($r = 1.13 \text{ \AA}$) i a la molècula de HCl ($r = 1.27 \text{ \AA}$).



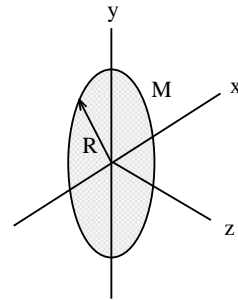
Sol: $CO: I = 1.5 \times 10^{-46} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $HCl: I = 2.6 \times 10^{-47} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

- 13** Calcula el moment d'inèrcia d'una vareta de massa m i longitud L , al voltant d'un eix perpendicular a distància h de l'extrem.

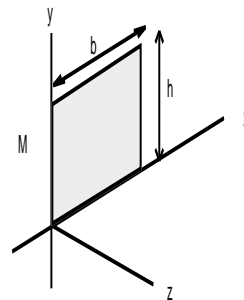


- 14** Trobeu el moment polar d'inèrcia I_z (respecte de l'eix z) d'un disc de massa M i radi R .

Sol: $I_z = \frac{1}{2}MR^2$.

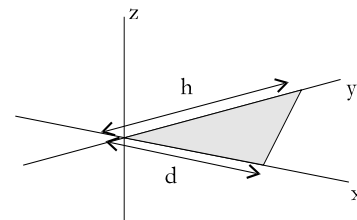


- 15** Determinem els moments d'inèrcia, respecte dels eixos de coordenades indicats a la figura, i els radis de gir, per a una placa plana rectangular de base b , altura h i massa M .

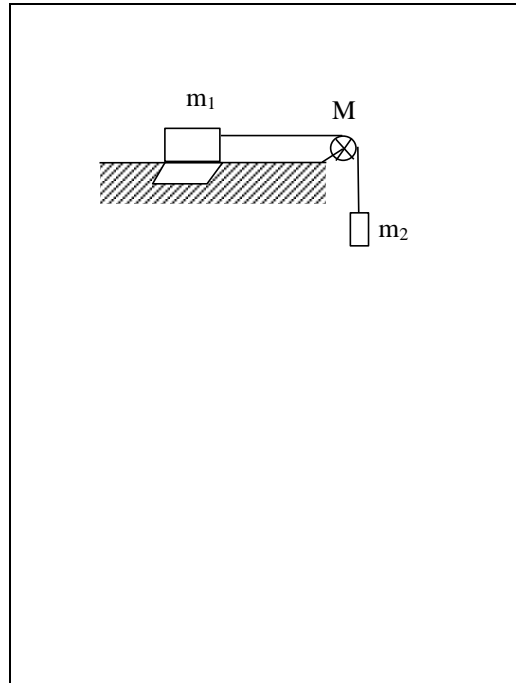


- 16** Un triangle rectangle de catets h i d es troba situat en el pla x - y . La placa triangular té massa σ per unitat de superfície.

- Calcula la posició del centre de masses.
- Determina el valor del moment d'inèrcia respecte de cadascun dels tres eixos de coordenades.



- 17 Un pati, de massa m_1 , llisca sense fricció per un carril pneumàtic horitzontal per l'acció d'una massa m_2 a la que està nuat mitjançant una corda de massa negligible que passa per una politja de massa M , radi R i moment d'inèrcia $I = MR^2$ col·locada al final del carril. Si la corda no patina en la politja, calculeu:

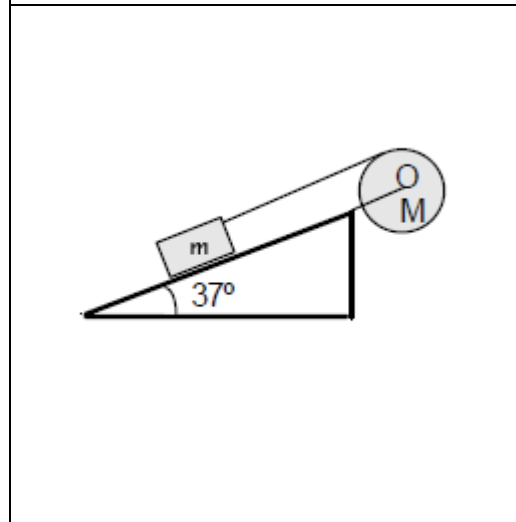


- a) L'acceleració de cada cos
- b) L'acceleració angular de la politja
- c) La tensió de la corda a cada part de la politja

Sol.: a) $a_1 = a_2 = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + M}$; b) $\alpha = a_1/R$

c) $T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + M}$, $T_2 = \frac{(m_1 + M)m_2 g}{m_1 + m_2 + M}$

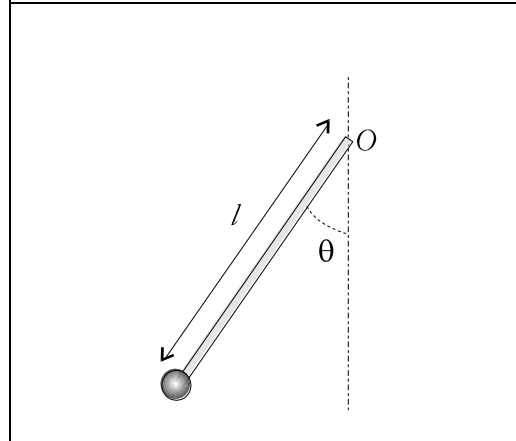
- 18 Un bloc de massa $m = 5$ kg llisca per una superfície inclinada 37° amb l'horitzontal amb un coeficient de fregament dinàmic $\mu_d = 0.25$. S'enrotlla una corda unida la bloc al voltant d'un volant amb eix de rotació fixat a O . El volant té un radi exterior $R = 0.2$ m, una massa $M = 20$ kg i un moment d'inèrcia respecte a l'eix $I = 0.8$ kg m^2 .



- a) ¿Amb quina acceleració llisca el bloc pel pla?
- b) ¿Quina és la tensió de la corda?

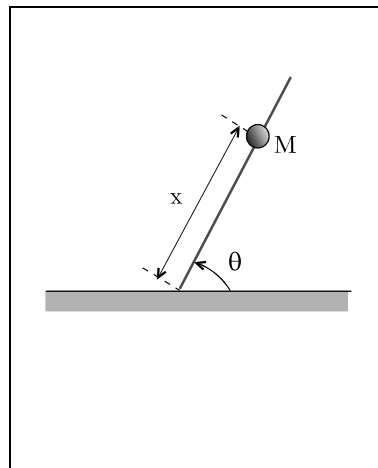
Sol: a) 1.97 m s^{-2} ; b) 9.85 N .

- 19 Una barra de longitud L té una bola de massa M fixada a un extrem. La barra, de massa (sense la bola) m , penja de l'altre extrem en un punt fix O , i pot girar al seu voltant. Si la barra forma inicialment, en repòs, un angle θ respecte de la vertical, i la deixem girar lliurement, ¿quina serà la seua acceleració angular en l'instant en què l'hem soltada?



Sol: $a = \frac{m/2 + M}{m/3 + M} \frac{g}{L} \sin\theta$

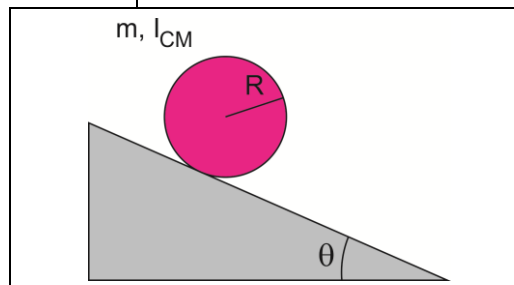
- 20** Fixem una petita esfera massissa de massa M a una barreta de longitud l i massa m , a una distància x del seu extrem inferior, el qual no pot rrelliscar sobre el sòl. Així, quan es deixa anar la barreta des d'una posició inicial en què aquesta presenta un angle θ_0 d'inclinació respecte de l'horitzontal, el sistema gira respecte de l'extrem fix.



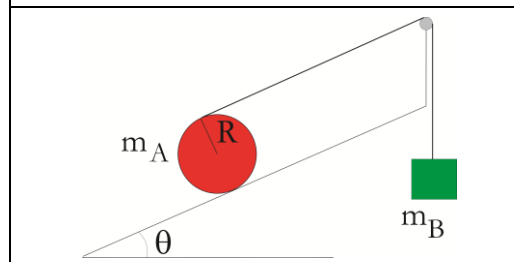
¿En quin cas caurà la barreta més ràpidament: si la massa M està més prop de l'extrem inferior que del superior ($x < L/2$), o en la situació contrària?

Sol: quan $x < L/2$

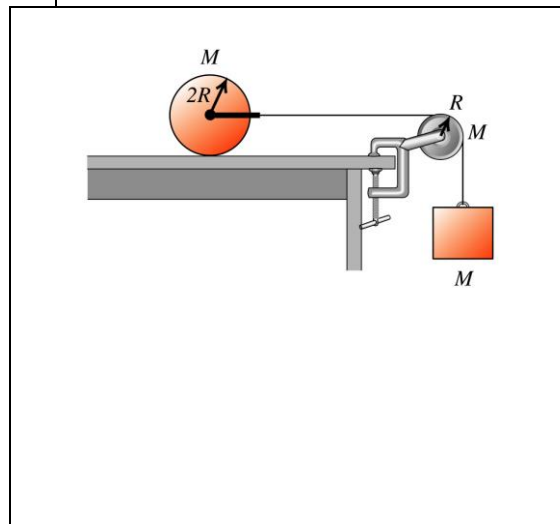
- 21** Un cos de massa m , moment d'inèrcia I_{CM} i radi R , roda sense lliscar per un pla inclinat un angle θ . Calcula l'acceleració lineal del CM.



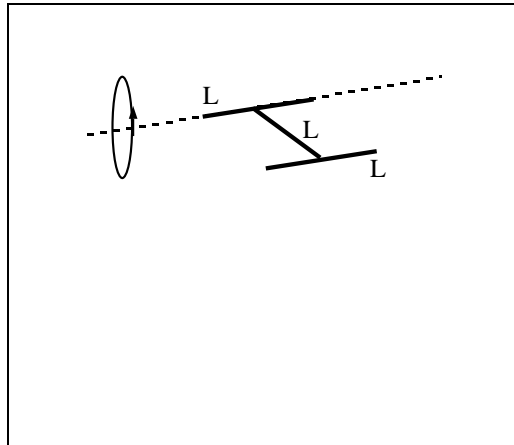
- 22** En el sistema de la figura, el cilindre de massa m_A roda sense lliscar. Quina és l'acceleració del bloc de massa m_B ?



- 23** Un cilindre sòlid uniform de massa M i radi $2R$ resta sobre una taula horitzontal. Es nuga un fil per mitjà d'un enganxament a un eix que passa pel centre del cilindre de manera que aquest pot girar. El fil passa per una corriola amb forma de disc de massa M i radi R muntada en un eix sense fricció que passa pel seu centre. Un bloc de massa M es suspèn de l'extrem lliure del fil. El fil no llisca en la corriola, i el disc roda sense lliscar. Si el sistema s'allibera des del repòs, ¿quina acceleració cap a avall tindrà el bloc?

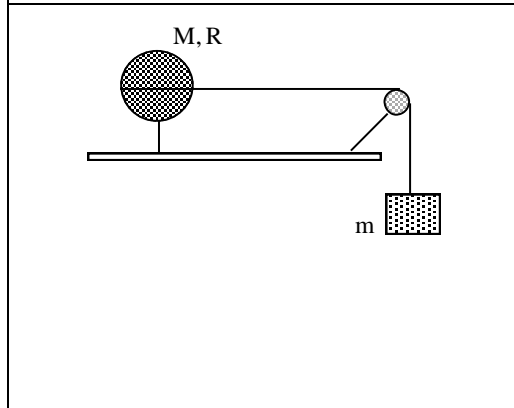


- 24 Un cos rígid de massa m està format per tres varetes idèntiques unides en forma de H. El cos pot girar lliurement al voltant d'un eix horitzontal que passa per una de les pates de la H. Si el cos cau des del repòs des d'una posició en què el pla de la H és horitzontal, ¿quina serà la seua velocitat angular quan el pla de la H estiga vertical?



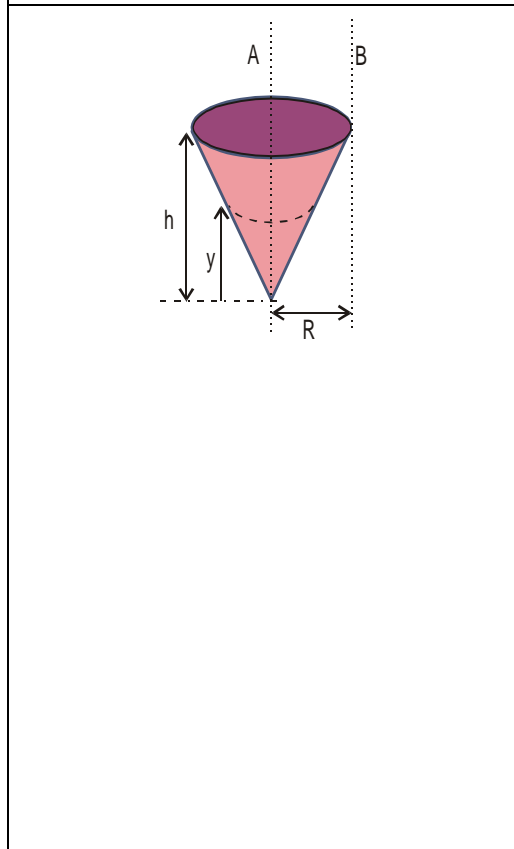
Sol.: $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$

- 25 Una corfa esfèrica gira al voltant d'un eix vertical sense fricció. Una corda lleugera passa per l'equador de la corfa, per una corriola lleugera, sense fricció, i finalment està nuada a un objecte que cau, des del repòs sota la influència de la gravetat. ¿Quina és la velocitat de l'objecte quan ha davallat una distància h ?



Sol.: $v = \sqrt{gh \frac{m}{m/2 + M/3}}$

- 26 El con de la figura, amb massa $M = 1$ kg, radi $R = 10$ cm i altura $h = 20$ cm, gira al voltant de l'eix A, amb velocitat angular ω .



- Calcula la velocitat lineal d'un punt situat en la superfície a una distància vertical y del vèrtex.
- Calcula la velocitat d'un punt de la superfície situat a $y = h/2$ quan $\omega = 3$ rad/s.
- Si el con accelera, des del repòs, amb acceleració angular $\alpha = 2$ rad/s², durant 10 s, quina serà la velocitat lineal del punt de la superfície situat a $y = h/2$?
- Si quan gira al voltant de l'eix central A té una velocitat angular ω , i quan gira al voltant d'un eix B, paral·lel a A, que toca la base, té la mateixa velocitat angular, ¿quina és la diferència entre les energies cinètiques d'un moviment a l'altre, $E_B - E_A$?

27 Una roda pot girar lliurement al voltant del seu eix. El seu moment d'inèrcia al voltant d'aquest eix és 2.8 kg m^2 . La roda es troba en repòs inicialment i aleshores s'hi connecta un motor que exerceix sobre la roda un moment de força constant de 20.0 Nm al voltant de l'eix.

- (a) ¿Quant de treball ha fet el motor sobre la roda quan aquesta ha girat 5.0 revolucions?
- (b) ¿Quina és aleshores la magnitud de la velocitat angular de la roda?

28 La part en rotació d'un motor té una massa de 15 kg i un radi de gir de 10 cm .

- a) Calculeu el moment angular quan està girant a 1800 rpm .
- b) ¿Quin moment de força és necessari per a assolir aqueixa velocitat angular en 3 s ?

Sol: a) $28.3 \text{ J}\cdot\text{s}$; b) $9.42 \text{ N}\cdot\text{m}$.

29 Una roda gira des del repòs al voltant d'un eix fix que passa pel seu centre de masses de manera que $\theta = bt^3$, on b és una constant positiva amb unitats rad/s^3 .

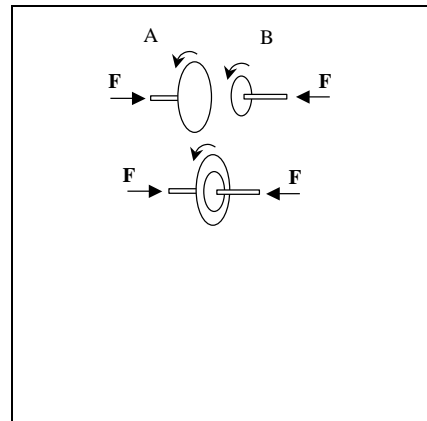
- a) Calcula el treball resultant efectuat pel moment de força sobre la roda quan ha girat un angle θ .
- b) Calcula la velocitat angular de la roda quan ha girat un angle θ .
- c) Calcula l'energia cinètica de la roda quan ha girat un angle θ . ¿S'obeix el teorema del treball-energia?

Sol: a) $\frac{9}{2} I_{cm} b^{2/3} \theta^{4/3}$, b) $3b^{1/3} \theta^{2/3}$ c) Si.

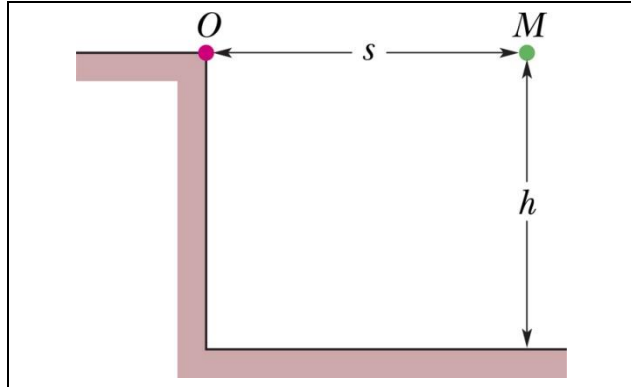
30 Un motor elèctric realitza un parell motor constant $\tau = 10 \text{ Nm}$ sobre una pedra d'esmolador muntada en el seu eix. El moment d'inèrcia de la pedra és $I = 2 \text{ kg m}^2$. Si el sistema comença a moure des del repòs, trobeu el treball fet pel motor en 8 s , l'energia cinètica de la pedra en eixe instant i la potència mitjana lliurada pel motor.

Sol.: $W = K = 1600 \text{ J}$; $P_m = 200 \text{ W}$

31 La figura mostra dos discs, un el volant d'un motor i l'altre el plat d'embragatge unit a la barra de transmissió. Els seus moments d'inèrcia són I_A i I_B i inicialment giren amb velocitats angulars ω_A i ω_B respectivament. En un moment determinat s'espenten els discs amb forces dirigides al llarg de l'eix, tals que no afegixen cap moment extra als discs. Els dos freguen un contra l'altre fins que adquireixen una velocitat angular comú ω . Trobeu l'expressió d'eixa ω .



- 32 Es deixa caure una partícula de massa $M = 0.25 \text{ kg}$ des d'un punt que està a una altura $h = 1.80 \text{ m}$ sobre el terra, i a una distància horitzontal $s = 0.45 \text{ m}$ d'un punt d'observació O , com es mostra en la figura. ¿Quina és la magnitud del moment angular de la partícula respecte del punt O quan la partícula ha caigut la meitat de la distància fins el terra?

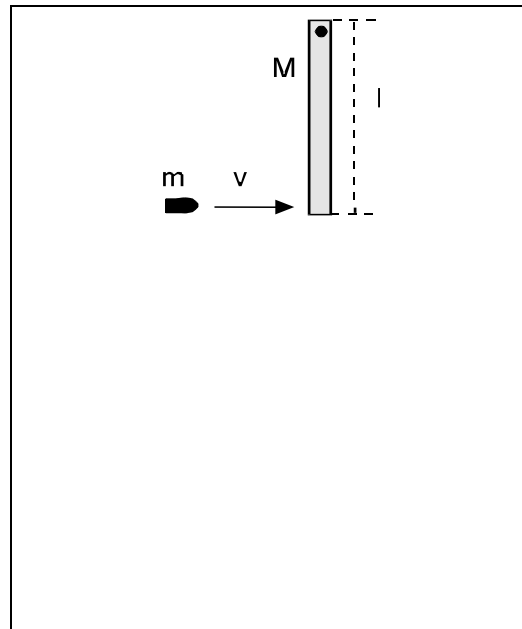


- 33 Una partícula de massa m es mou segons la trajectòria

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + at^2)\mathbf{i} + bt^3\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$$

- Determineu la velocitat $\mathbf{v}(t)$ i el moment angular $\mathbf{L}(t)$.
- Determineu la força $\mathbf{F}(t)$ i el moment de força $\boldsymbol{\tau}(t)$ que actuen sobre la partícula.
- Comproveu que es compleix el teorema del moment angular.

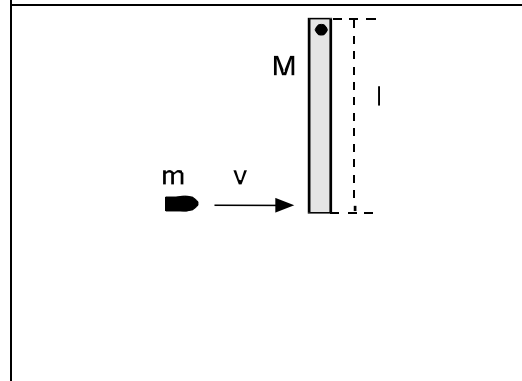
- 34 Una barra de fusta, de massa M i longitud b , està suspesa del seu extrem superior al voltant del qual pot girar lliurement. Inicialment la barra està penjant vertical en repòs. Es dispara una bala de massa m a l'extrem inferior de la barra, que entra en la barra a velocitat v i s'hi queda insertada.



- ¿Quina és la velocitat angular immediatament després?
- Suposa que la barra té 1.0 m de llarg i té una massa de $M = 0.600 \text{ kg}$. ¿Quin és el valor numèric de la velocitat angular si la bala té massa $m = 0.015 \text{ kg}$ i entra en la barra a velocitat $v = 300 \text{ m/s}$?

Sol: 21 rad/s.

- 35 Una barra de fusta, de massa M i longitud b , està suspesa del seu extrem superior al voltant del qual pot girar lliurement. Inicialment la barra està penjant vertical en repòs. Es dispara una bala de massa m a l'extrem inferior de la barra, que entra en la barra a velocitat v i s'hi queda insertada.



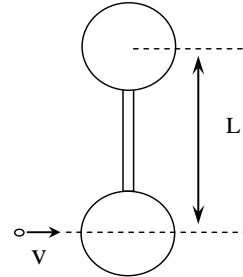
Quin angle màxim puja la barra?

- 36** Una pesa està formada per dues boles de massa $M_1 = 2$ kg, i radi $R = 0.1$ m, i una barra de $M_2 = 0.3$ kg. La distància entre els centres de les boles és $L = 0.4$ m. La pesa està parada sobre una superfície llisa sense fregament. En aquesta posició, es llança una bola de pastelina de 50 g amb una velocitat $v = 40$ m/s, segons s'indica en la figura, que es queda apegada a la pesa.

- a) Calculeu el moment d'inèrcia de la pesa respecte d'un eix perpendicular al pla del dibuix que pase pel seu centre de masses.

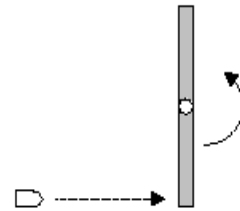
Fent l'aproximació que el centre de masses no canvia després de la col·lisió, i que la pesa no roda sobre la superfície, calculeu:

- b) La velocitat del centre de masses de la pesa després de la col·lisió
 c) La velocitat angular de gir de la pesa.

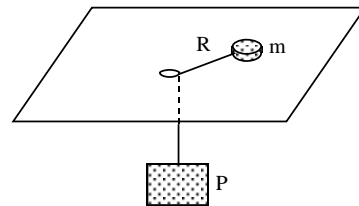


- 37** Una bala de 0,02 kg i velocitat horitzontal 120 m/s, xoca contra una vareta vertical que pot rotar al voltant del seu eix central segons s'indica a la figura. La massa de la vareta és 1,5 kg i la seua longitud 24 cm. Si la bala impacta en l'extrem de la vareta i es queda incrustada en ella:

- a) Calculeu la velocitat angular adquirida pel sistema vareta-bala després del xoc.
 b) Calculeu la pèrdua de energia en el xoc.
 c) En què es transforma aquesta energia perduda?



- 38** Un petit objecte de massa $m = 2$ kg s'ha fixat a un fil inextensible que passa per un forat. Aquest objecte està girant en un cercle de radi $R = 0.5$ m, amb una velocitat angular $\omega = 60$ rpm equilibrant un cert pes de magnitud P . S'hi afegeix un altre pes de magnitud P' , amb la qual cosa el radi del cercle es redueix a 0.25 m. Calculeu els pesos P i P' .



Sol: $P = 39.5$ N; $P' = 276.3$ N.

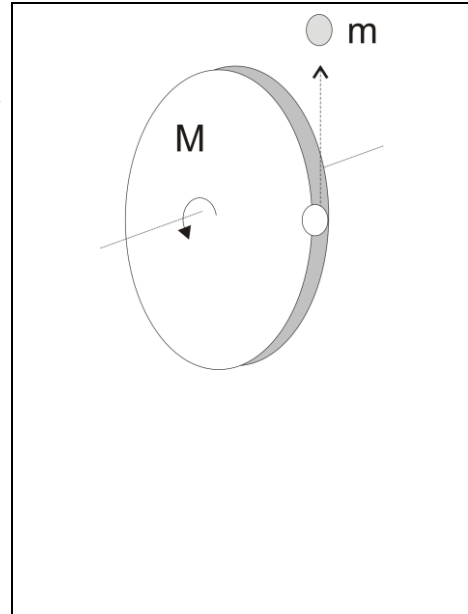
- 39** Una molècula d'hidrogen es mou a velocitat $\mathbf{v}_{\text{H}_2} = 2000\mathbf{i} + 3000\mathbf{j} \text{ m s}^{-1}$ i col·lisiona amb un àtom d'oxigen que es mou a velocitat $\mathbf{v}_{\text{O}} = -1000\mathbf{i} \text{ m s}^{-1}$. A conseqüència de la interacció es forma una molècula d'aigua. Calculeu:
- La velocitat de l'aigua en l'instant posterior a la col·lisió.
 - Si la velocitat angular inicial de l'hidrogen era $1000 \text{ k rad s}^{-1}$, doneu la velocitat angular de l'aigua.
 - Doneu l'energia cinètica de translació i rotació abans i després de la col·lisió.

Dades: $I_{\text{H}_2} = 0.6 \text{ uma } \text{Å}^2$; $I_{\text{H}_2\text{O}} = 1.6 \text{ uma } \text{Å}^2$; $1 \text{ kg} = 6.023 \times 10^{26} \text{ uma}$; $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

Material auxiliar

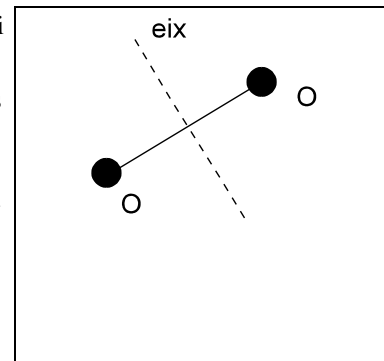
40 Un disc uniform de massa M i radi R gira al voltant d'un eix horitzontal que passa pel seu centre, amb velocitat angular ω_0 . Un tros de massa m es trenca de la vora del disc, ix amb velocitat $R\omega_0$, i s'eleva verticalment des del punt inicial.

- a) Quina és l'energia cinètica i el moment angular inicial del disc? A quina altura arriba el tros des del punt inicial, fins que comença a caure?
- b) Quin és el moment d'inèrcia final del disc (sense el tros)?
- c) Quina és la velocitat angular final del disc?



41 La molècula d'oxigen, O_2 , té una masa total de 5.30×10^{-26} kg i una inèrcia rotacional de 1.94×10^{-46} kg·m² al voltant d'un eix que passa en perpendicular pel centre de la línia que uneix els àtoms. Suposeu que una tal molècula en un gas té una velocitat de 500 m/s, i que la seua energia cinètica rotacional és dos terços de la seua energia translacional. S'ha de calcular la velocitat angular de la molècula.

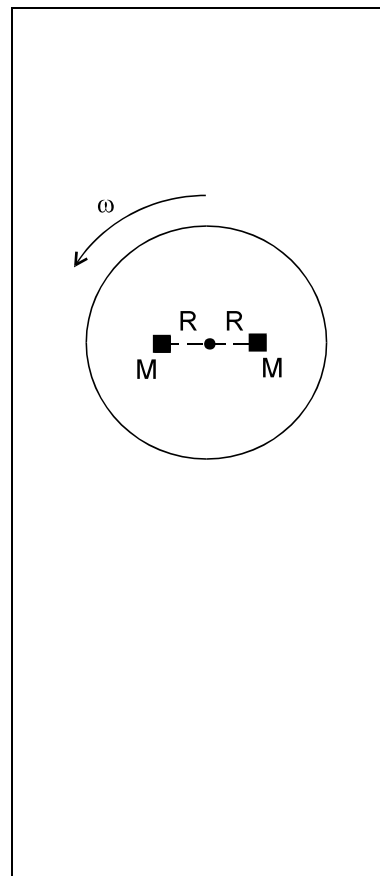
Sol.: 6.75×10^{12} rad/s



42 En certes circumstàncies, una estrella pot col·lapsar formant un objecte ultradens constituït fonamentalment per neutrons i anomenat *estrella de neutrons*. La densitat d'estes estrelles és unes 10^{14} vegades major que la de la matèria sòlida ordinària (uns 10^{17} kg/m³). Suposa que representem l'estrella com una esfera sòlida rígida uniforme, tant abans com després del col·lapse. El radi inicial era de 7.0×10^5 km (comparable al del Sol), i el final, de 16 km.

- (a) Si l'estrella girava una volta cada 30 dies, calcula la velocitat angular de l'estrella de neutrons.
- (b) Calcula l'energia rotacional de l'estrella de neutrons. Si esta energia d'alguna manera es converteix en una altra classe d'energia i s'emet a la mateixa taxa a la qual el Sol irradia energia (que és aproximadament 3.9×10^{26} J/s), ¿Quant de temps tardaria l'estrella de neutrons a tindre velocitat angular zero?

43 La figura indica una plataforma circular horitzontal que pot girar lliurement al voltant d'un eix vertical que passa pel seu centre. Dos blocs idèntics, pesats i menuts, cadascun de massa M , estan units a la plataforma a costats oposats del centre i a una distància R d'ell. La plataforma gira en sentit antihorari amb una velocitat angular constant ω .



- a) ¿Quina és la velocitat amb què es mou cada bloc per la rotació de la plataforma?
- b) ¿Quina és l'energia cinètica de cada bloc?
- c) ¿Quina és l'energia cinètica del sistema sencer consistent en la plataforma i els dos blocs? (Suposa que la massa de la plataforma mateixa és negligiblement menuda.)
- d) Suposa que cadascun dels dos blocs estiguera fix a una distància $2R$ del centre de la plataforma. ¿Quantes voltes augmenta la velocitat de cada bloc, l'energia cinètica de cada bloc, i l'energia cinètica del sistema?

Sol: (a) $R\omega$. (b) $MR^2\omega^2 / 2$. (c) $MR^2\omega^2$. (d) 2, 4, 4.

44 Considerem una altra volta la plataforma anterior.

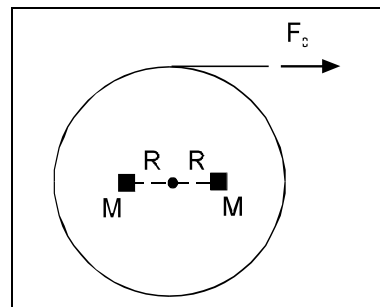
- a) ¿Quin és el moment d'inèrcia d'aquest sistema, al voltant de l'eix de rotació de la plataforma?
- b) ¿Quina és l'energia cinètica d'aquest sistema, si la calculem a partir de la relació

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 ?$$

¿Coincideix aquesta energia cinètica amb la que s'ha calculat directament en el problema anterior?

Sol: (a) $2MR^2$. (b) $MR^2\omega^2$

45 Considerem novament la plataforma de massa negligible, amb dos blocs de massa M col·locats a una distància R de l'eix de rotació. La plataforma està estacionària inicialment. S'aplica una força constant, de magnitud F_0 , a una corda enrotllada al canto de la plataforma. ¿Quina és la velocitat angular de la plataforma quan la força ha estirat la corda al llarg d'una distància L ?



46 Un model excessivament simple (però històricament important) de l'àtom d'hidrogen va ser proposat per Niels Bohr el 1912. D'acord amb el model, existeix una força atractiva elèctrica entre un electró, de càrrega $-e$, i un protó de càrrega $+e$. Com a resultat, l'electró, de massa m , efectua revolucions en una òrbita circular al voltant del protó, que és molt més pesant i per tant pràcticament estacionari. Així, Bohr va proposar que el moment angular de l'electró només pot tenir valors discrets que són múltiples enters de la constant de Planck $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, la qual és la constant d'importància fonamental en la mecànica quàntica.

- (a) Aplica la llei de Newton a l'electró sobre el qual actua la força elèctrica deguda al protó, de magnitud

$$F = k_e \frac{e^2}{R^2}$$

Troba el radi R de l'òrbita de l'electró quan aquest té el menor moment angular possible \hbar .

- (b) ¿Quina és la velocitat de l'electró quan es mou en aquesta òrbita?
- (c) Els valors de les constants rellevants són $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, i $k_e = 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$. D'acord amb aquest model, ¿quin és el valor predit per al radi R de l'àtom d'hidrogen?

Aquest valor és una bona estimació, però aquest model és inadequat i inconsistent amb la mecànica quàntica, ja que l'electró en un àtom no viatja en una trajectòria ben definida.

Sol: (a) $(1/k_e) [\hbar^2 / (me^2)]$ (b) $k_e e^2 / \hbar$ (c) $0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$.