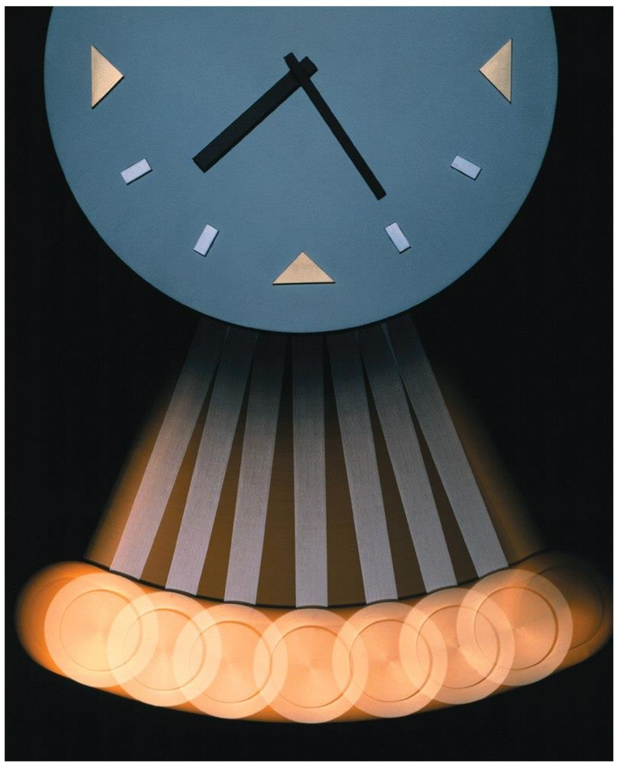
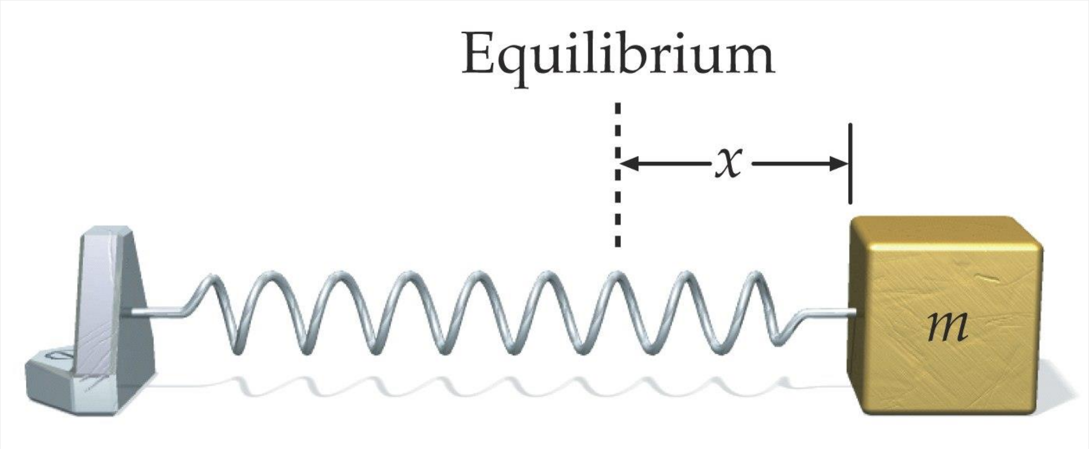
Tema 9
Moviment oscil·latori

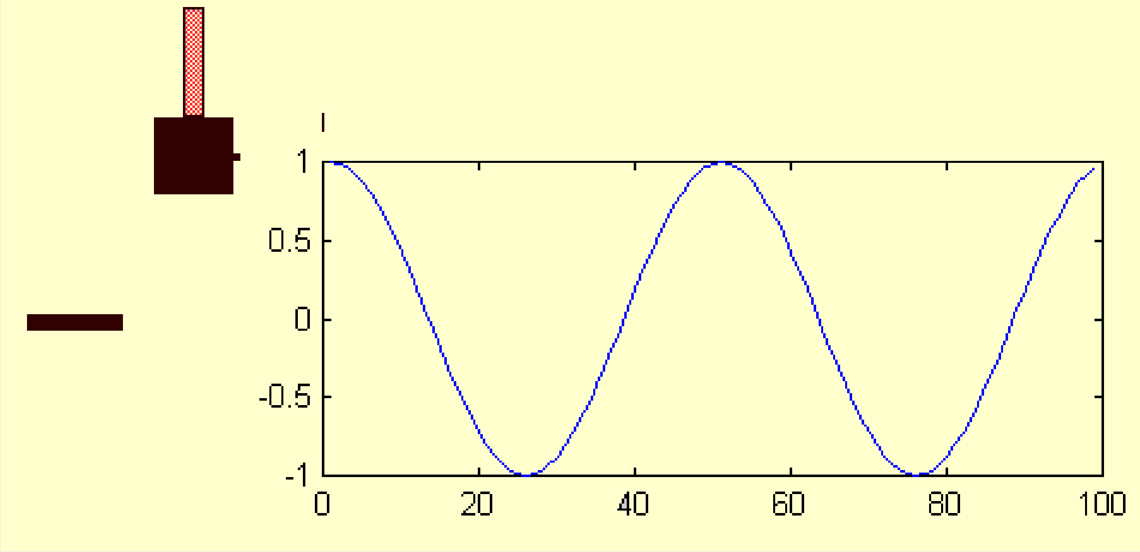


9.1. Moviment harmònic simple.
9.2. Energia en el moviment harmònic simple.
9.3. Exemples de moviments oscil.lants.
9.4. Oscil.lacions menudes al voltant d'un punt d'equilibri
9.5. Oscil·lacions amortides.
9.6. Oscil·lacions forçades i ressonància.

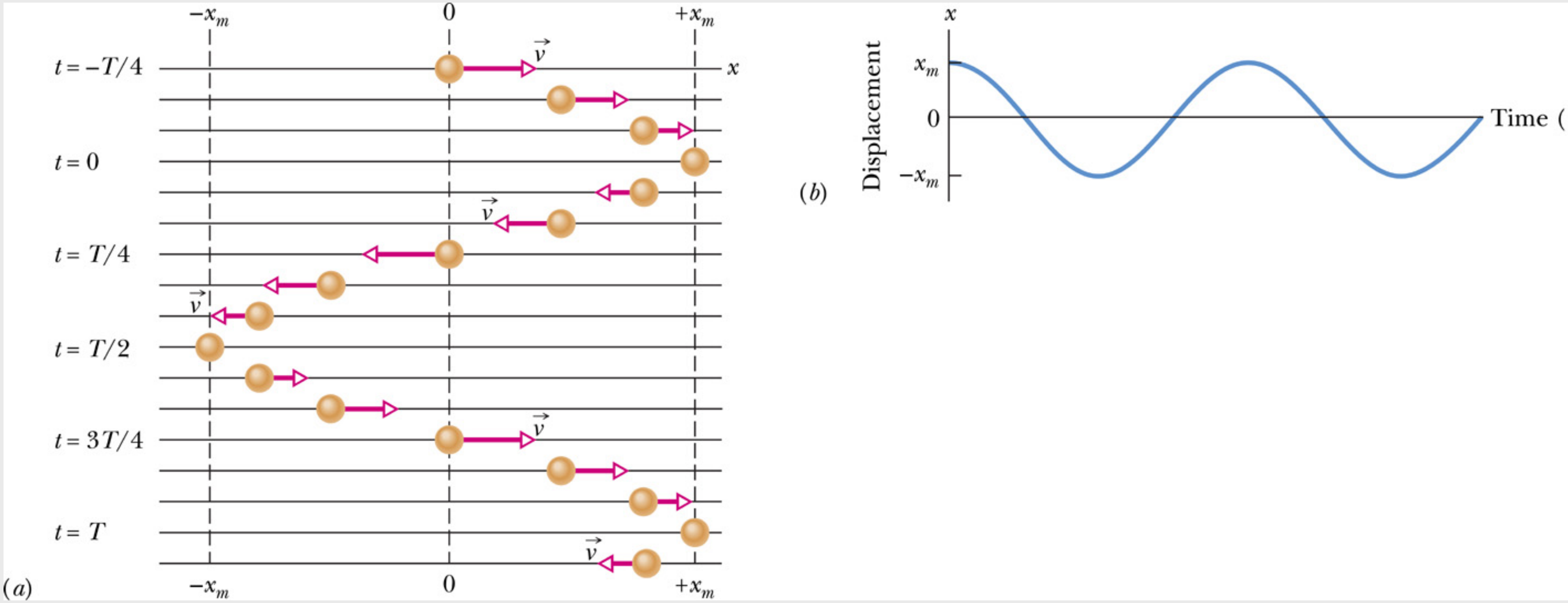


Simulacio

Amplitud A
Periode T
Freqüència f
Freqüència angular



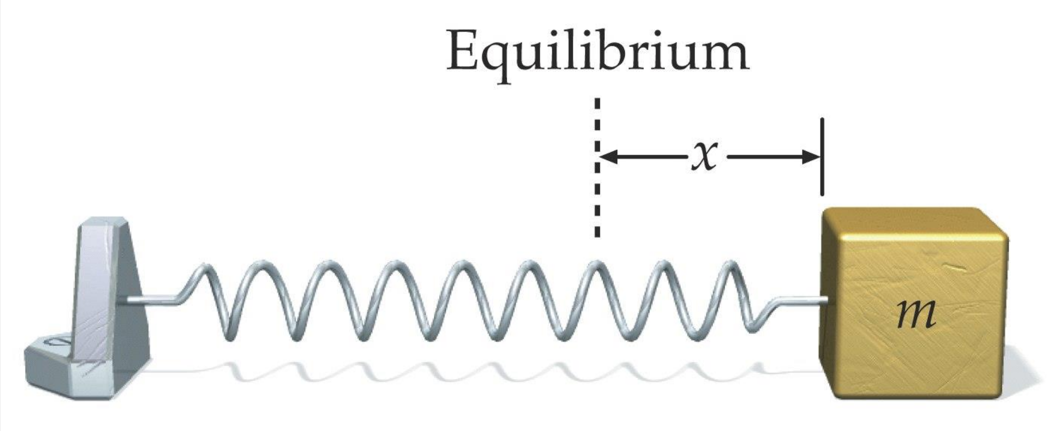
9.1. Moviment harmònic simple



1 Un transductor ultrasònic (una mena d'altaveu) que s'utilitza en dianosi mèdica oscil·la a una freqüència de 6.7 MHz = 6.7×10^6 Hz. ¿Quant de temps dura cada oscil·lació, i quina és la freqüència angular?

Com la força que actúa sobre el moll val

$$F = -kx$$



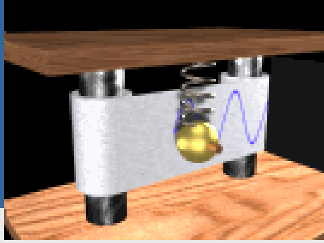
L’equació de moviment queda

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

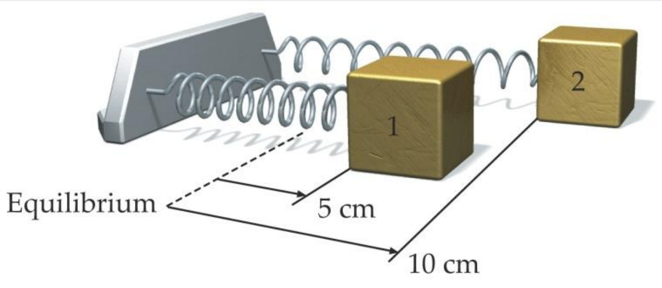
Si agafe $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ aleshores

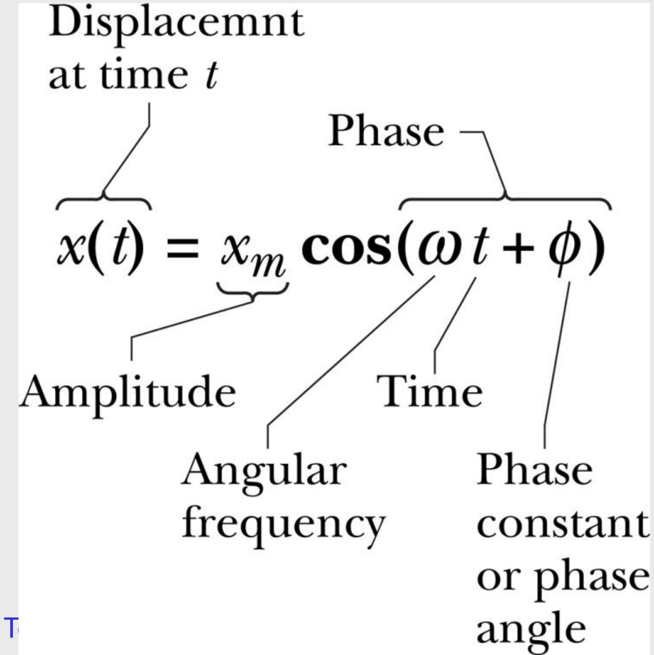
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

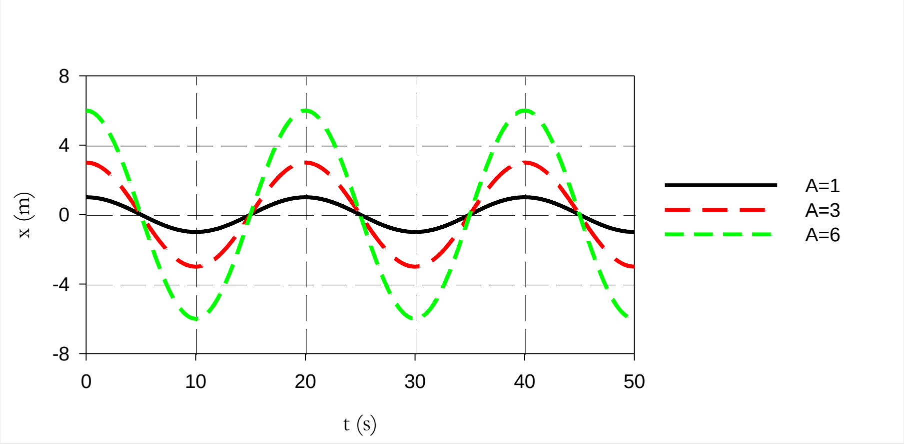
Equació diferencial d’un moviment harmònic simple

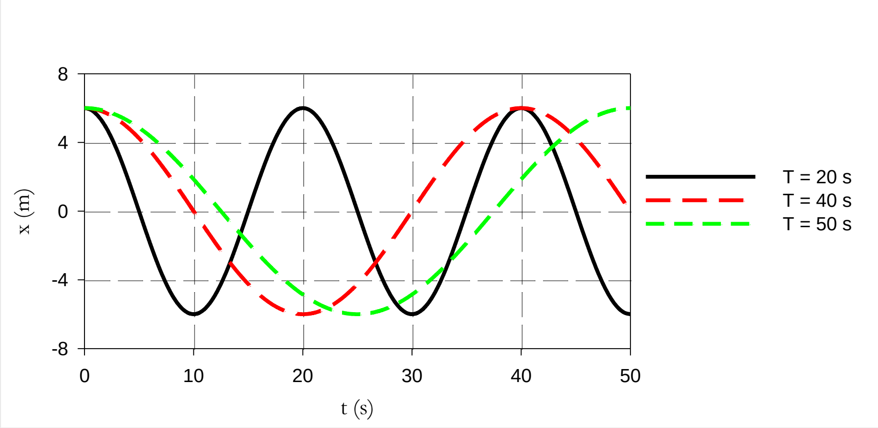


$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

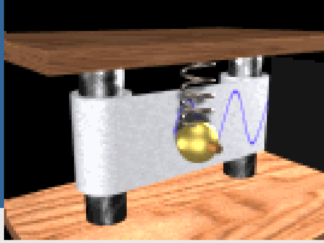




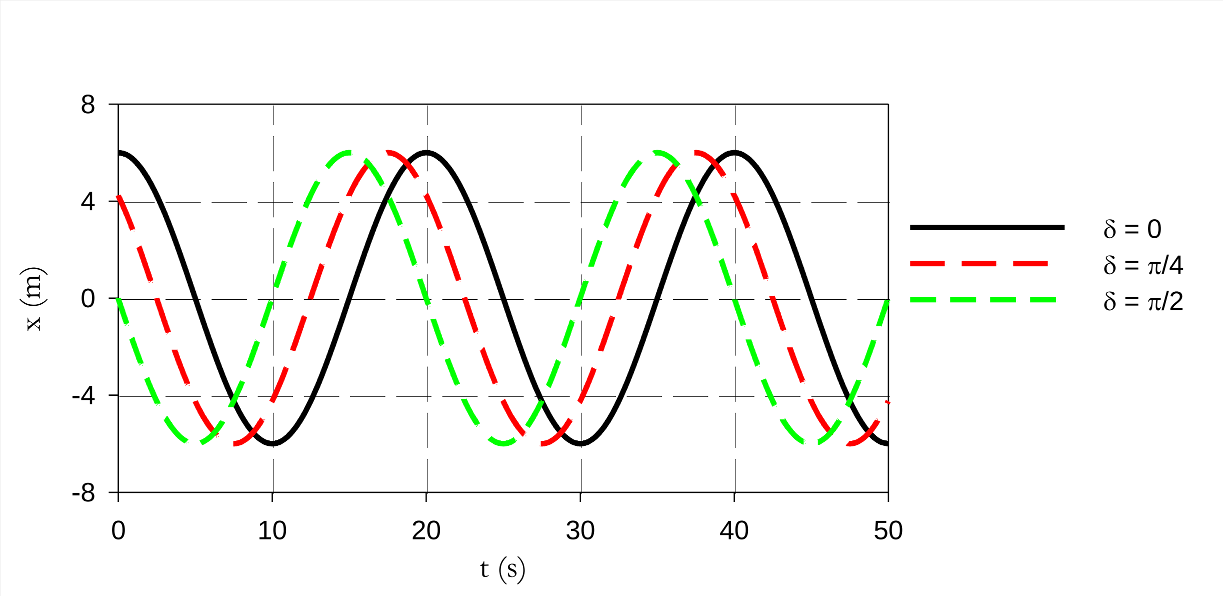




$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$



http://work.colum.edu/~rasinariu/physics_web/oscillations/level1/index.html

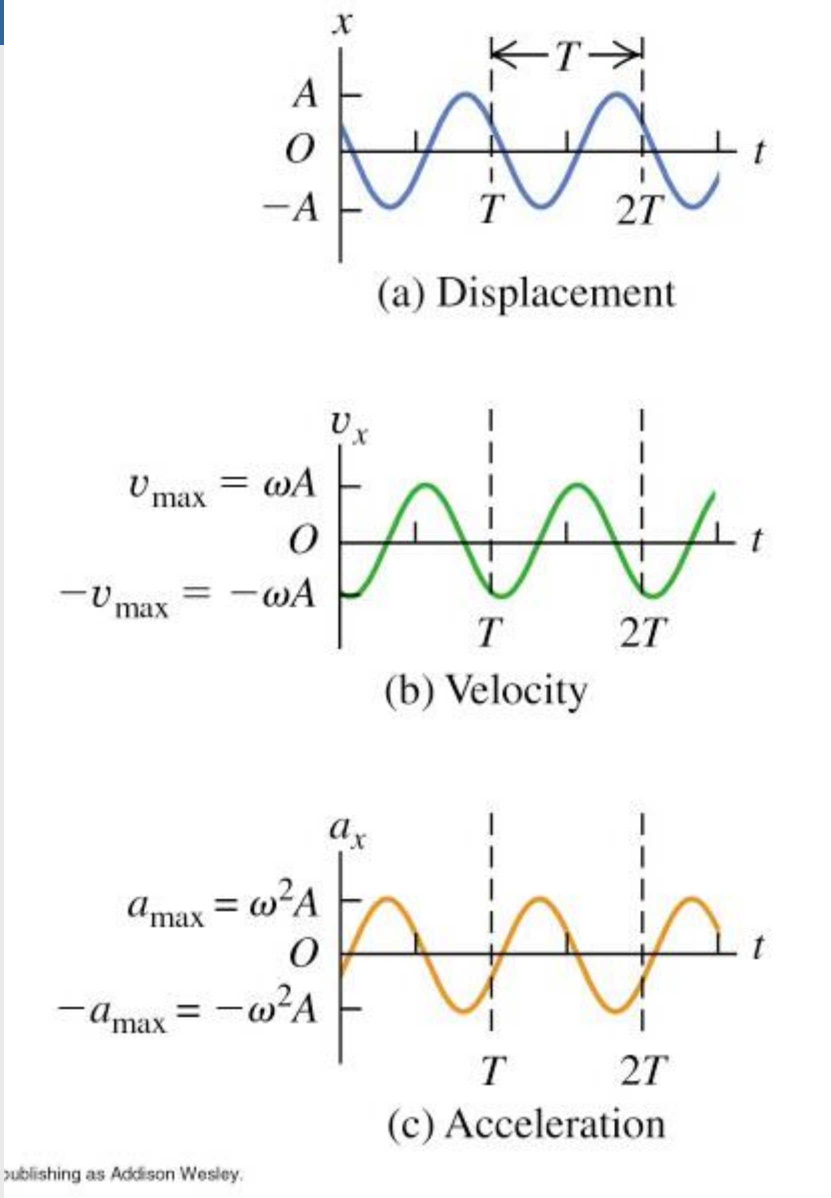
Cinemàtica
Del Moviment harmònic simple

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \delta)$$

$$= \omega A\cos(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2})$$

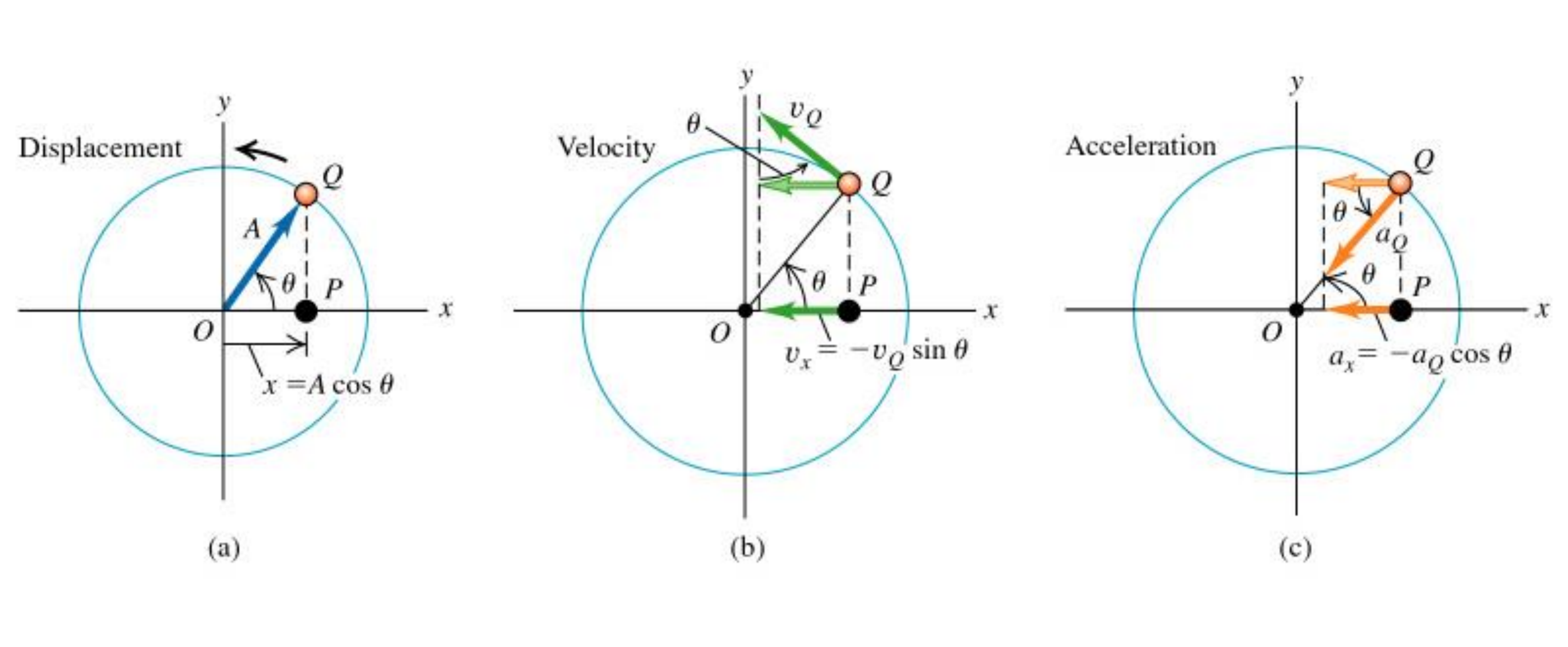
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$$



Relació entre la magnitud angular i el desplaçament

$$x(t) = A\cos\theta$$

$$\theta = \omega t + \delta$$

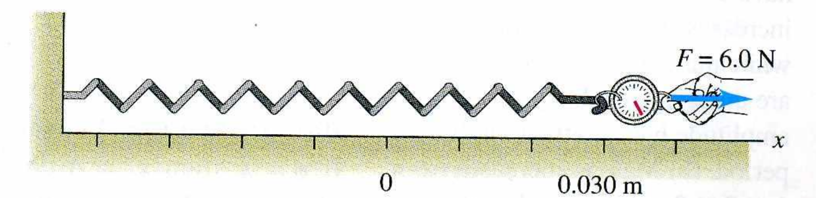


4 En t=0, el desplaçament $x(0)$ del bloc d'un oscil· lador harmònic simple és de -8.5 cm. La seua velocitat $v(0)$ és de -0.92 m/s. La massa del bloc és m=20g, i la constant del moll k=11N/m. Calculeu l'amplitud del moviment i l'angle de fase.

2 Es munta una molla horitzontalment, amb l'extrem esquerre sostingut estacionari. Per mitjà d'una balança unida a l'extrem lliure s'estableix que la força d'estirament és proporcional al desplaçament i que una força de 6.0 N causa un desplaçament de 0.030 m. Es lleva la balança i es fixa un cos de 0.50 kg a l'extrem de la molla, s'estira una distància 0.020 m, i es solta, de manera que oscil·la amb MHS.

(a) Trobeu la constant de força de la molla.

(b) Trobeu la freqüència angular, la freqüència i el periode de l'oscil.lació.



3 La molla del problema anterior té una constant de força 200 N/m i s'hi ha afegit una massa m = 0.50 kg. Ara donem al cos un desplaçament inicial de +0.015 m i una velocitat inicial de +0.40 m/s.

(a) Troba el periode, amplitud i angle de fase del moviment.

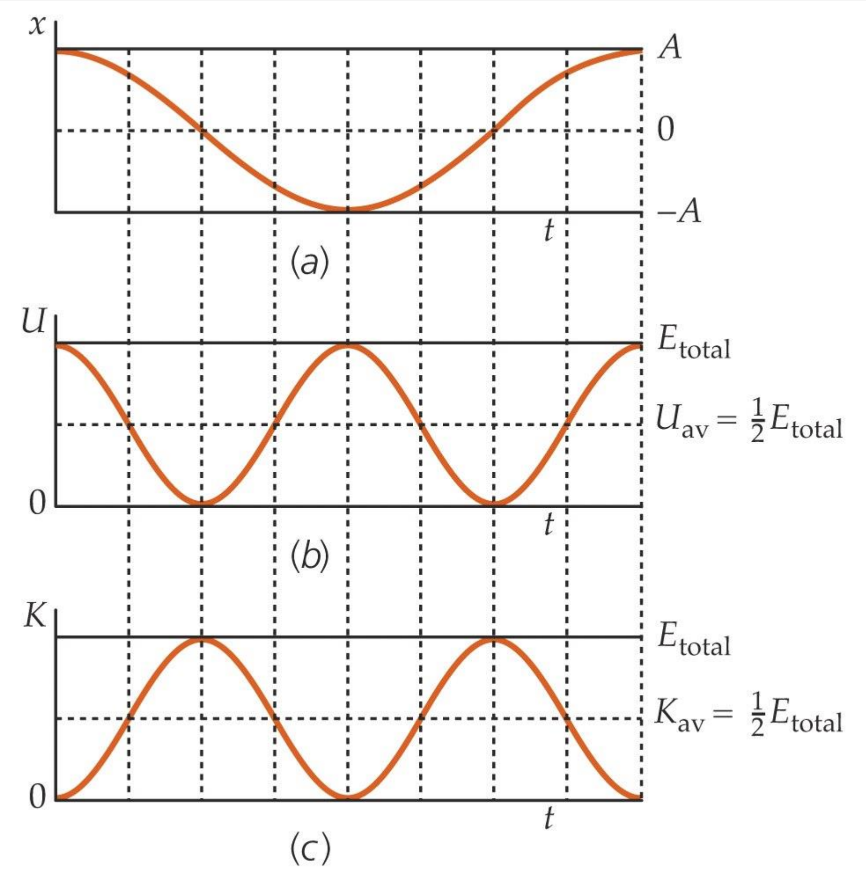
(b) Escriu les equacions per al desplaçament, la velocitat i l'acceleració en funció del temps.

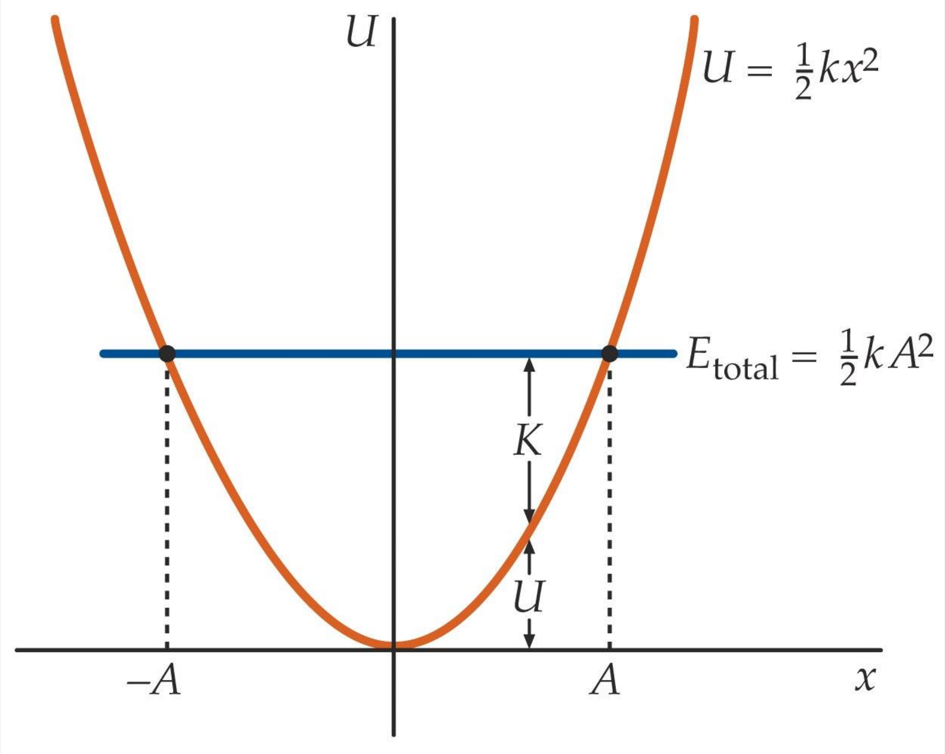
Problema

Una planxa horitzontal oscil.la lateralment amb moviment harmònic simple amb una amplitud d'1.5 m i una freqüència de 15 oscil.lacions per minut. Calculeu el valor mínim del coeficient de fregament perquè un cos col.locat sobre la planxa no rellisque quan aquesta es moga.

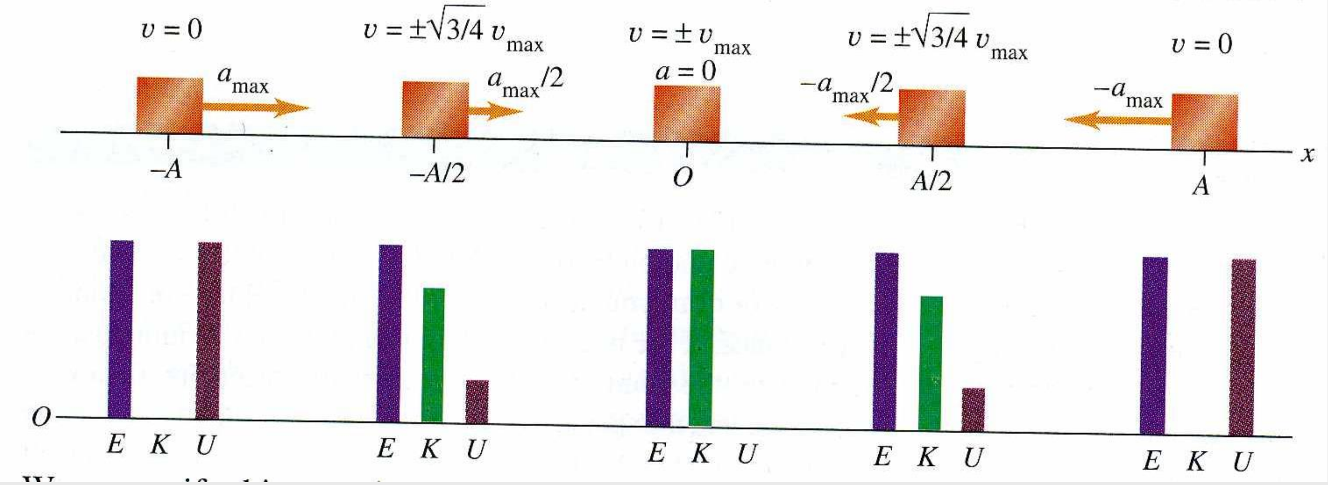
9.2. Energia en el moviment harmònic simple.

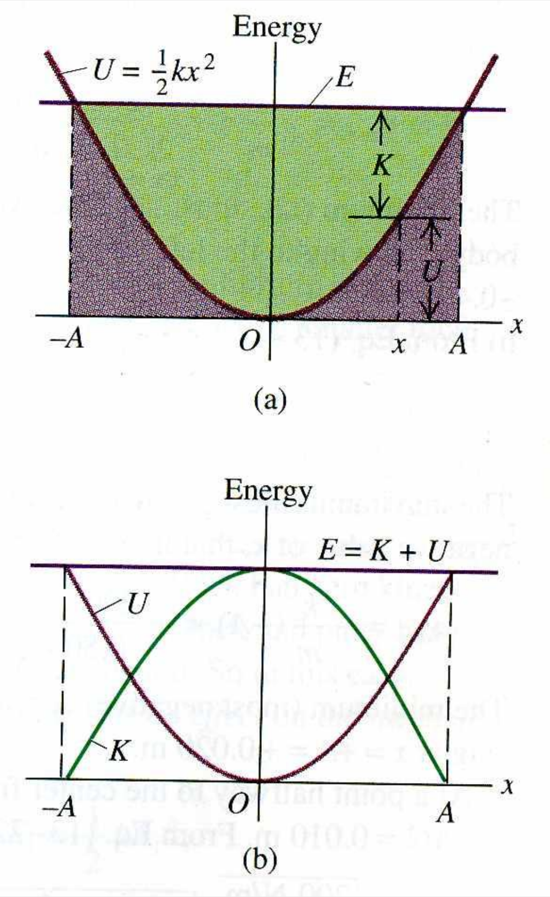
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{ct}$$



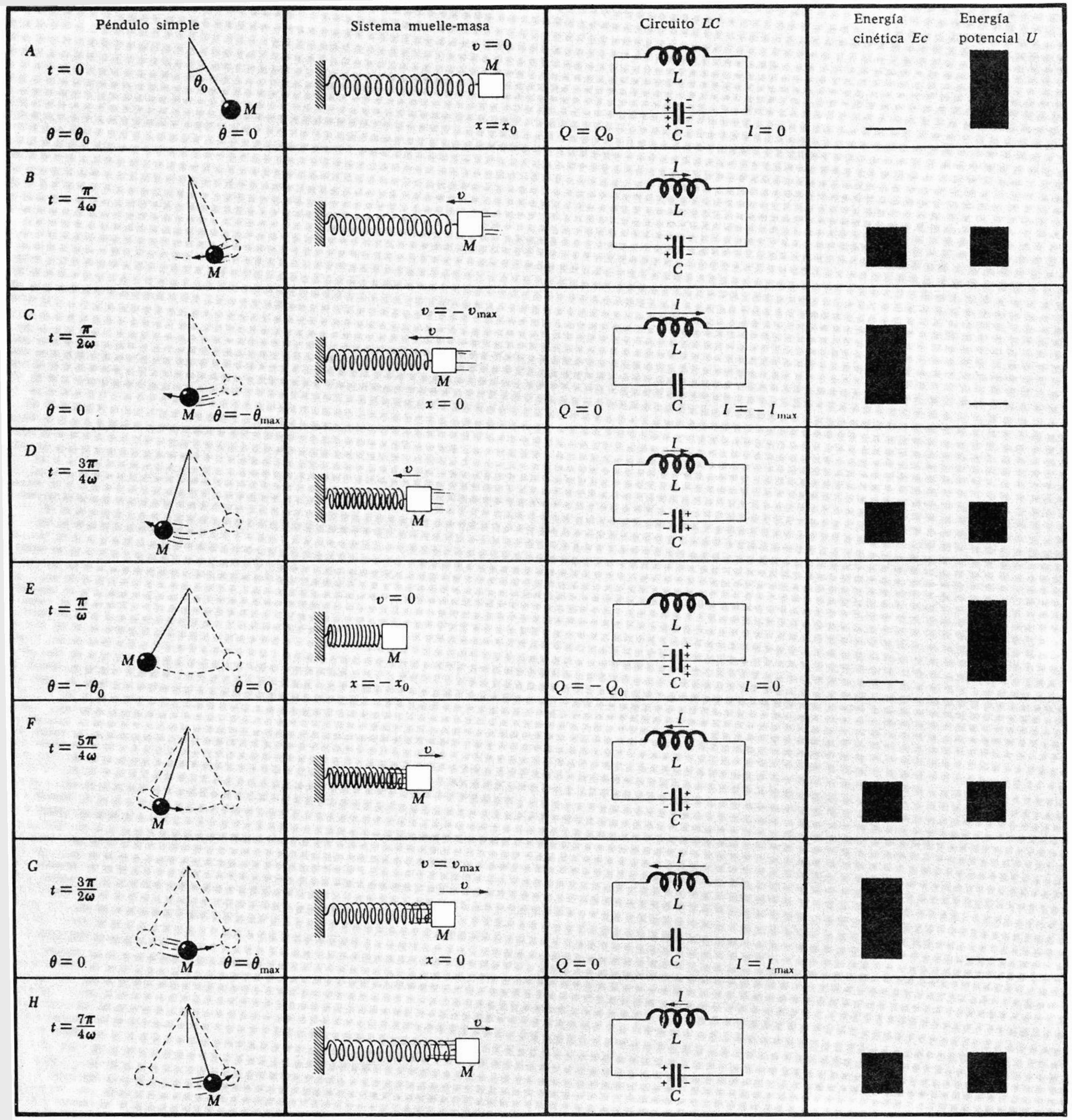


9.2. Energia en el moviment harmònic simple.



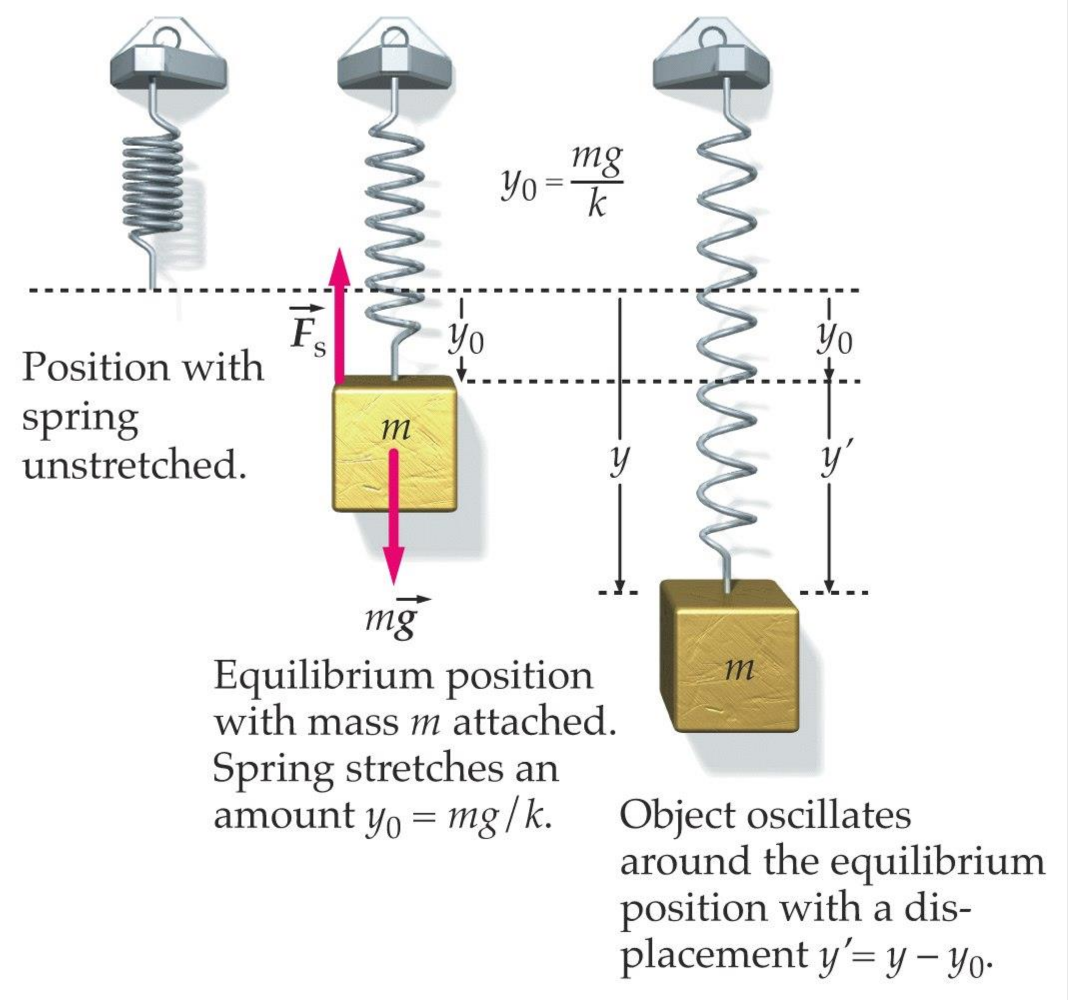


9.2. Energia en el moviment harmònic simple.

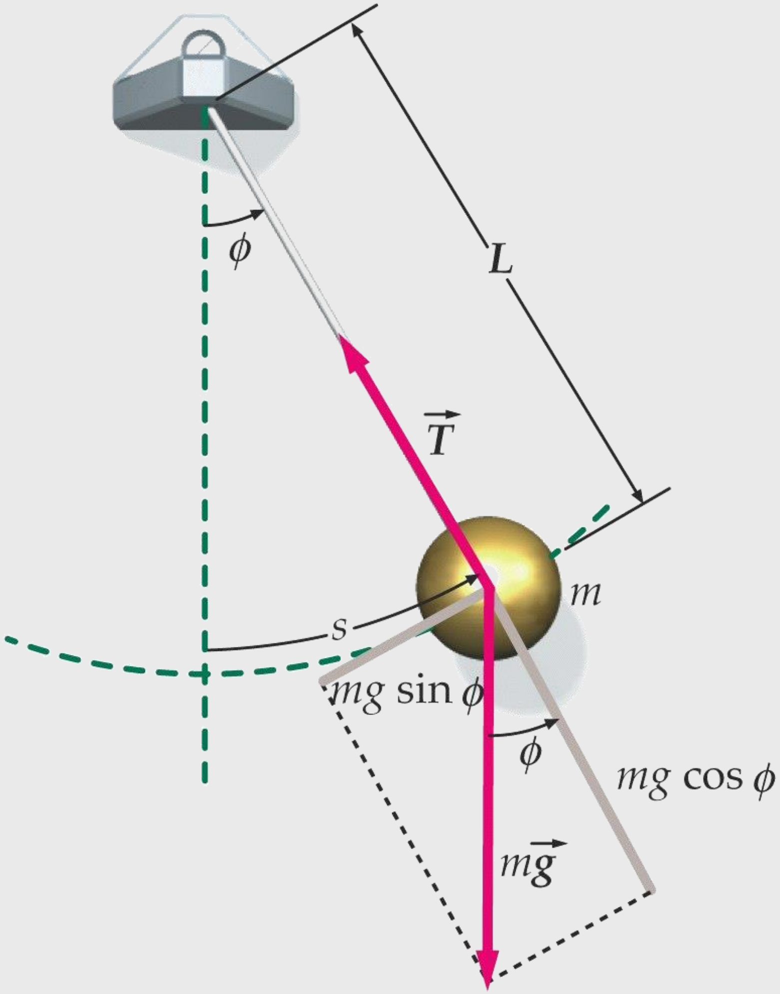


Moviment harmònic simple vertical

Una massa m penja d'un moll de constant k, enganxat al sostre. Escriu l'equació de moviment per a la coordenada y. Demostra que per a la coordenada y' s'obté un moviment harmonic simple.



El pèndol simple



La força restauradora val

$$F_t = -mg\sin\phi \quad = ma$$

Com el desplaçament ve donat per

$$s = L\phi \quad \rightarrow a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \quad = L\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}$$

L'equació del moviment és doncs

$$-g\sin\phi = L\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}$$

Per angles menuts puc aproximar $\sin\phi = \phi$ i obtinc

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\phi$$

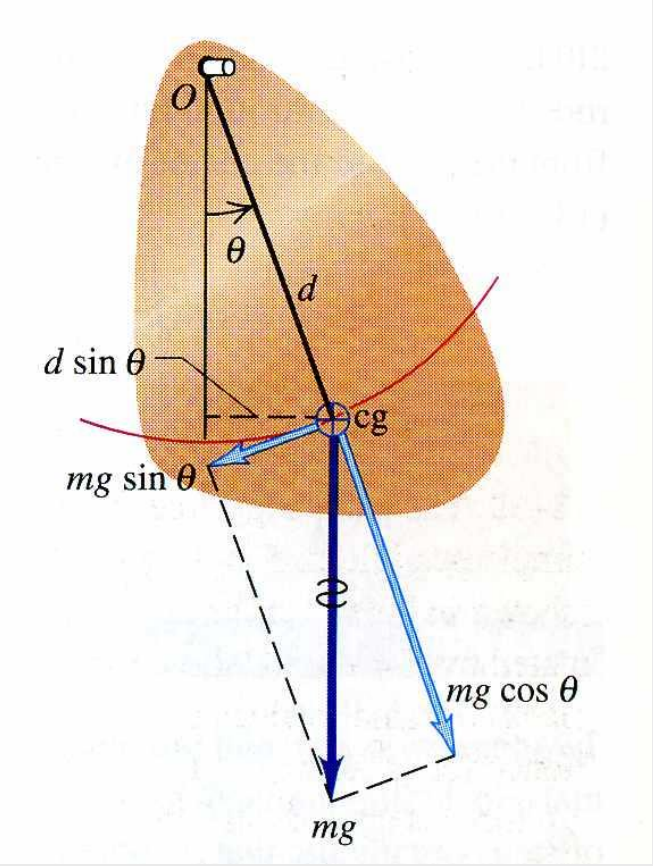
l'equació d'un oscil.lador harmònic amb

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

9.3. Exemples de moviments oscil.lants

Troba el periode i la freqüència d'un pèndol simple de 1.000 m de llarg en un lloc on $g = 9.800\ m/s^2$.

El pèndol físic



Ací el moment restaurador val

$$M = -d\,mg\sin\theta = I\alpha$$

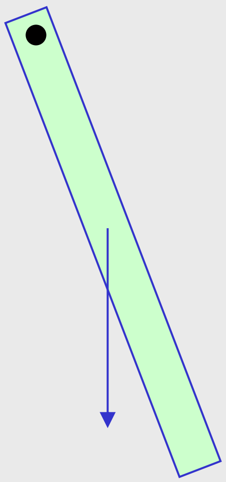
Per angles menuts puc aproximar $\sin\theta = \theta$ i així l'equació del moviment queda

$$-\frac{dmg}{I}\theta = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

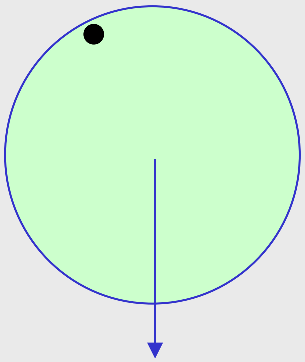
l'equació d'un oscil.lador harmònic amb

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Un pèndol físic consisteix en una barra uniform de longitud L que penja d'un extrem. Calcula el periode del moviment.



19 Es penja un disc de massa M i radi r de la seua vora. Troba el periode de les seues oscil·lacions menudes.



Problema

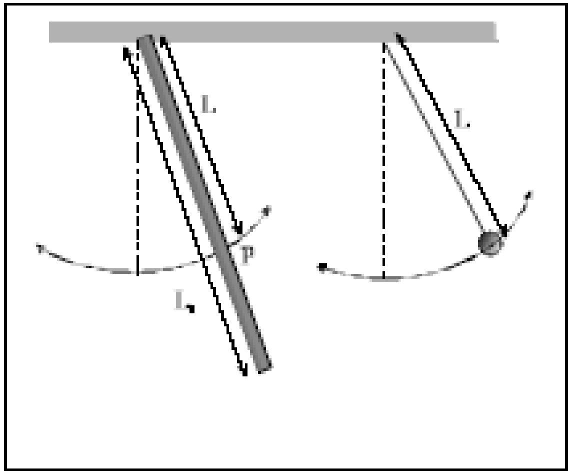
18 Una barnilla de massa m i longitud L_0, suspesa d'un dels seus extrems, oscil· la com un pèndol físic.

(a) Calculeu la longitud L d'un pèndol simple que tinga el mateix període.

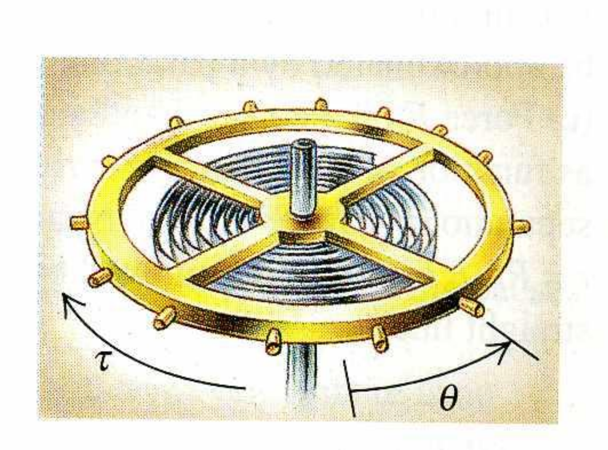
Ara invertim la barnilla suspenent-la des del punt P.

(b) ¿Quin serà el seu període d'oscil· lació?

Sol: (a) $L = \frac{2}{3} L_0$. (b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2L_0}{3g}}$



Pendol de Torsió



Ací el moment restaurador val

$$M = -\kappa\theta \quad = I\alpha$$

Reordenant aquesta equació obtinc

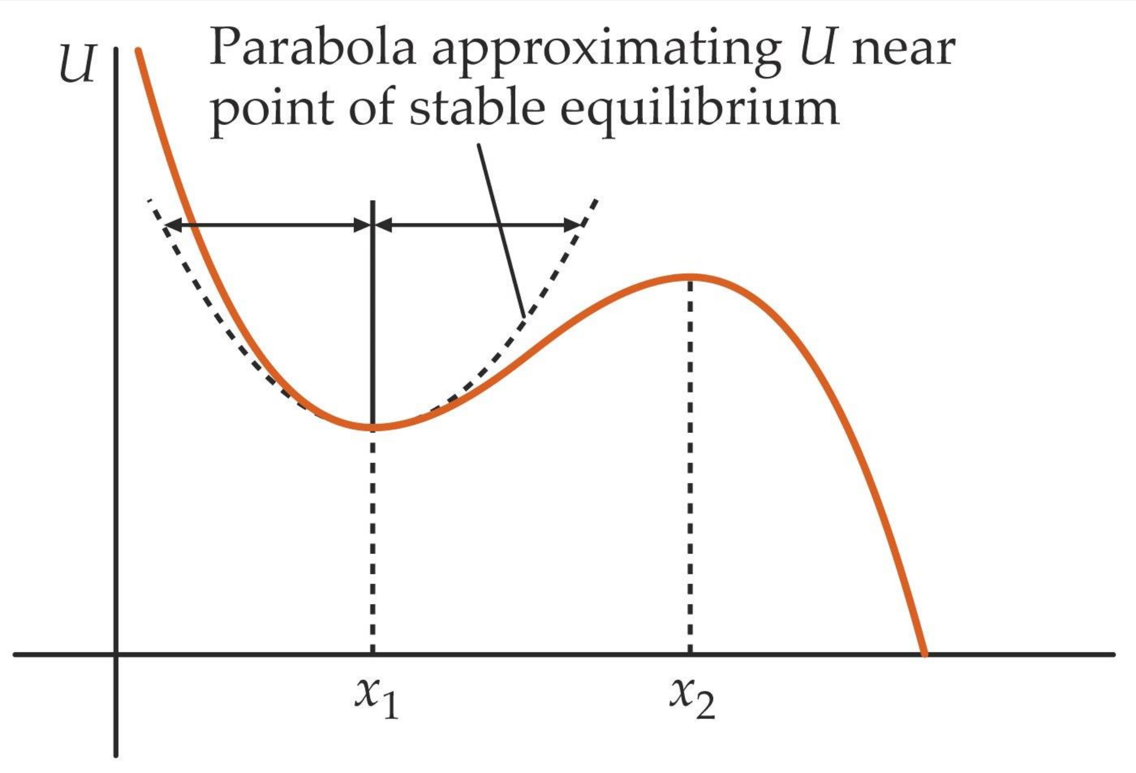
$$-\frac{\kappa}{I}\theta = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

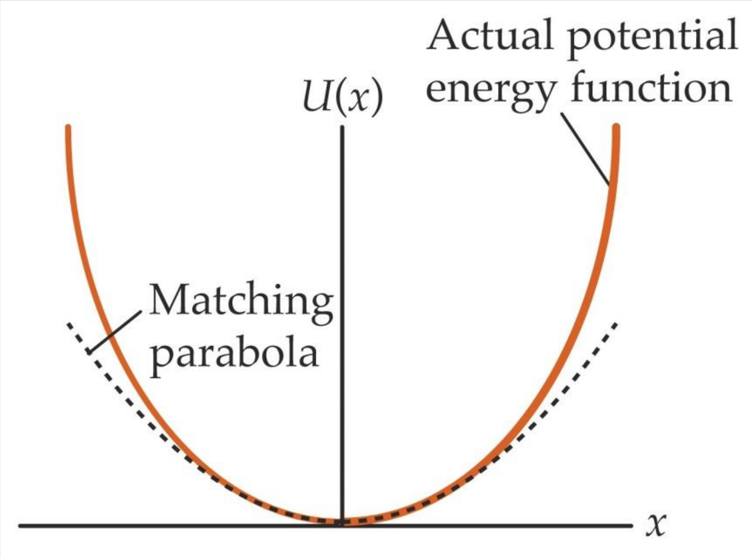
l’equació d’un oscil.lador harmònic amb

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

9.4. Oscil.lacions menudes al voltant d'un punt d'equilibri

Al voltant d'un punt d'equilibri qualsevol potencial el puc aproximar a un potencial de tipus parabòlic.





En aquesta regió la força, que en general podré calcular a partir del gradient del potencial, la podré linearitzar

9.4. Oscil.lacions menudes al voltant d'un punt d'equilibri

Per fer-ho, utilitzaré un desenvolupament en sèrie de Taylor. Possem que tinc un mínim de potencial en $x=x_0$ i que desplace la partícula respecte aquesta posició un Δx suficientment menut. En aquestes condicions puc aproximar la funció en sèrie de Taylor general

$$F(x) = \underbrace{F(x_0)}_{0} + \frac{1}{1!}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}\Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_0}\Delta x^2 + \ldots$$

Menyspreable si Δx és prou menut

Amb $x = x_0 + \Delta x$

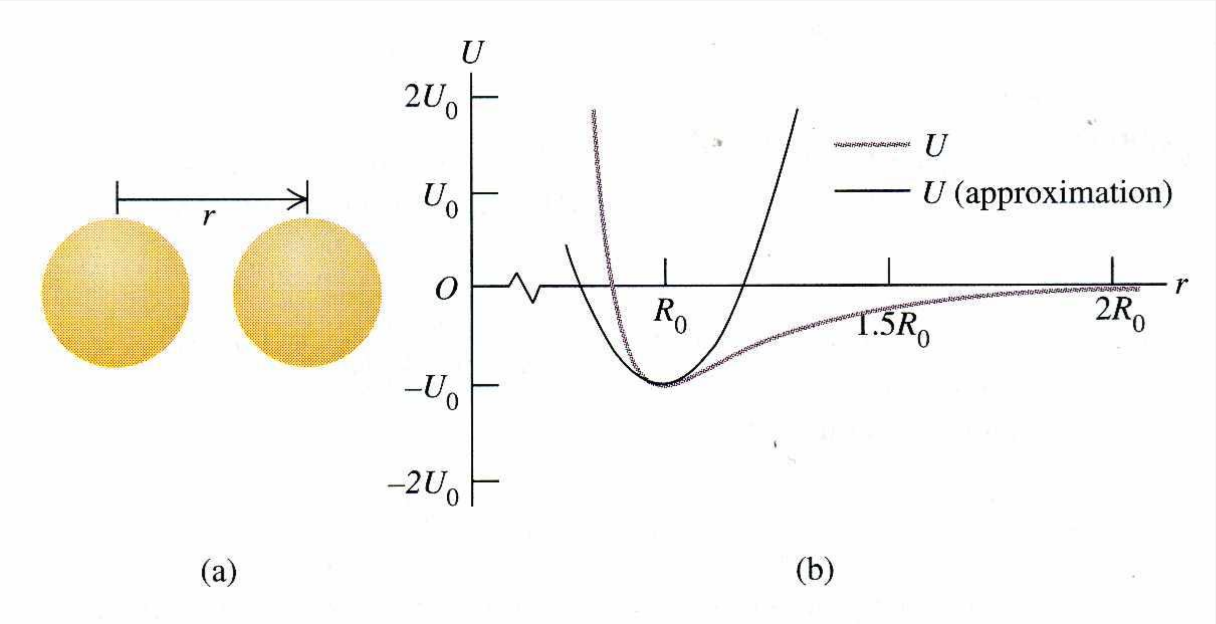
A una equació molt més senzilla:

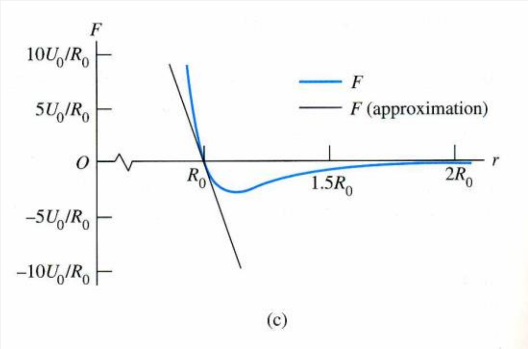
$$F(x) = \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}\Delta x$$

Que és l'equació d'un oscil.lador harmònic de freqüència angular d'oscil.lació

$$\omega = \sqrt{-\left(\frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}x}\right)_{x=x_0}/m}$$

Vibracions de les molècules





24 Dos àtoms d'argó formen una molècula feblement lligada, Ar_2, que es manté unida per una interacció de van der Waals, descrita per la funció d'energia potencial

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right]$$

amb $U_0 = 1.68\times10^{-21}$ J i $R_0 = 3.82\times10^{-10}$ m.

(a) Calcula la constant de força per a oscil·lacions menudes.

(b) Troba la freqüència de vibració dels àtoms. La massa atòmica mitjana de l'argó és 39.948 u.

9.5. Oscil·lacions amortides.

Considerem que el moviment de l'oscil.lador es produeix en un medi viscos

$$F = -bv$$

La força total que actua sobre el sistema

$$F + F' = -kx - bv$$

I l'equació del moviment queda

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Si definisc el temps de relaxació com $\tau = \frac{m}{b}$

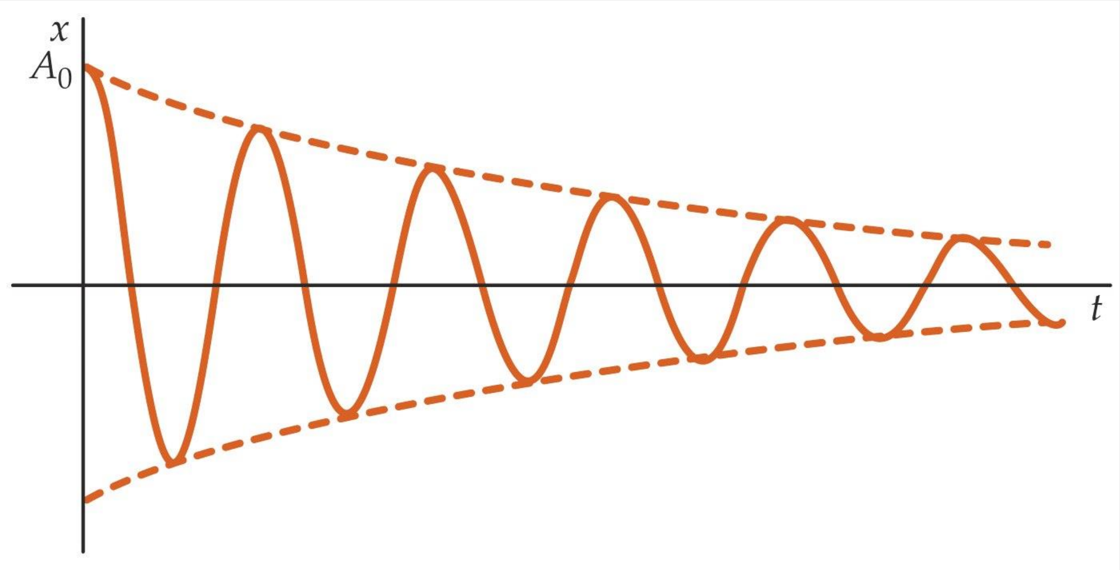
I utilitze la freqüència pròpia de l'oscil.lació $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

obtinc $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Aquesta eqüació diferencial presenta diverses sol.lucions

Oscil.lacions Subamortides

$$si\ b < 2\sqrt{km}\ \left(1 < 2\omega\tau\right)$$

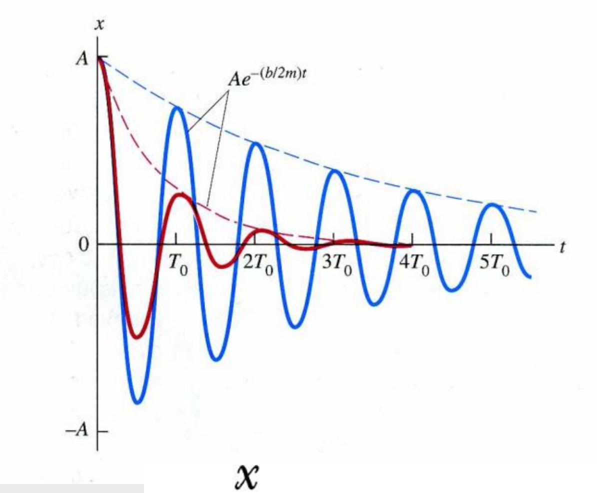


$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos\omega' t$$

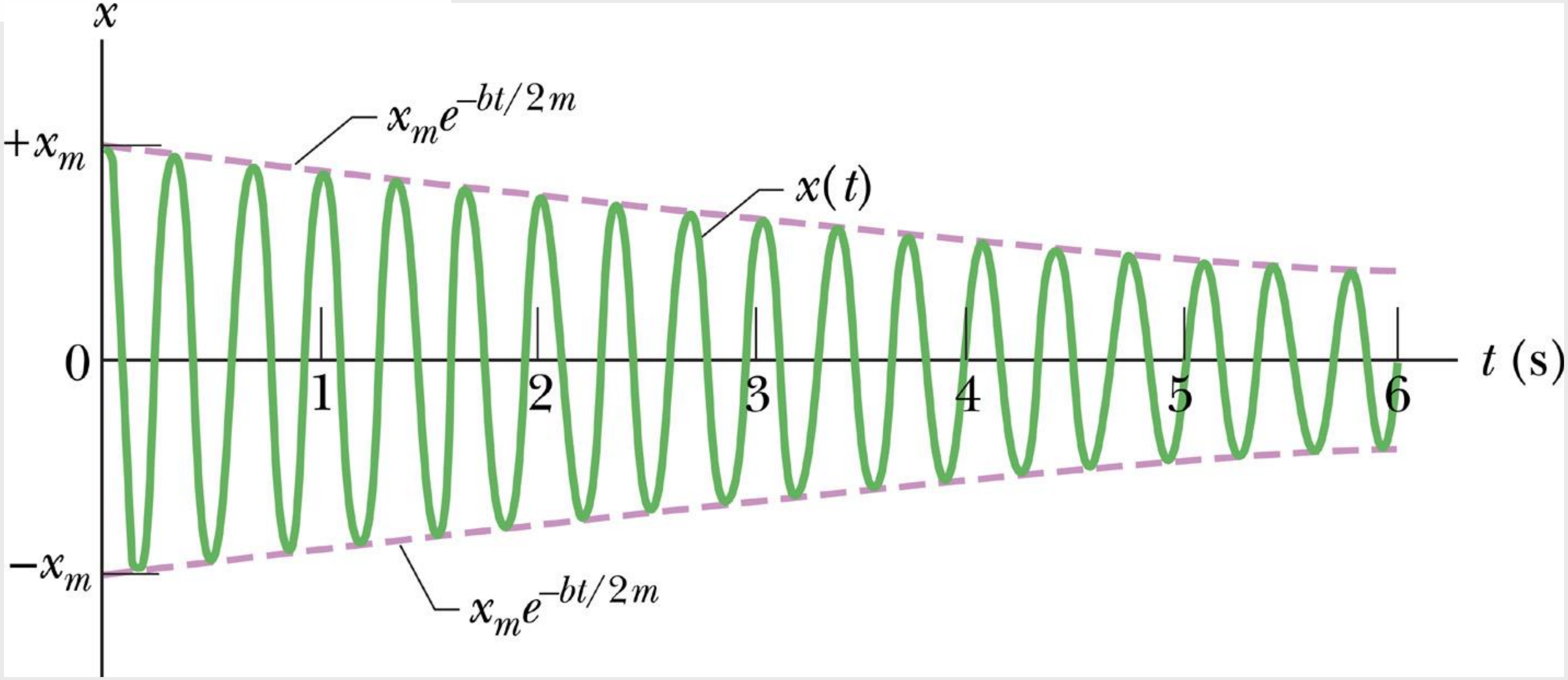
$$x = Ae^{-t/2\tau}\cos\omega' t$$

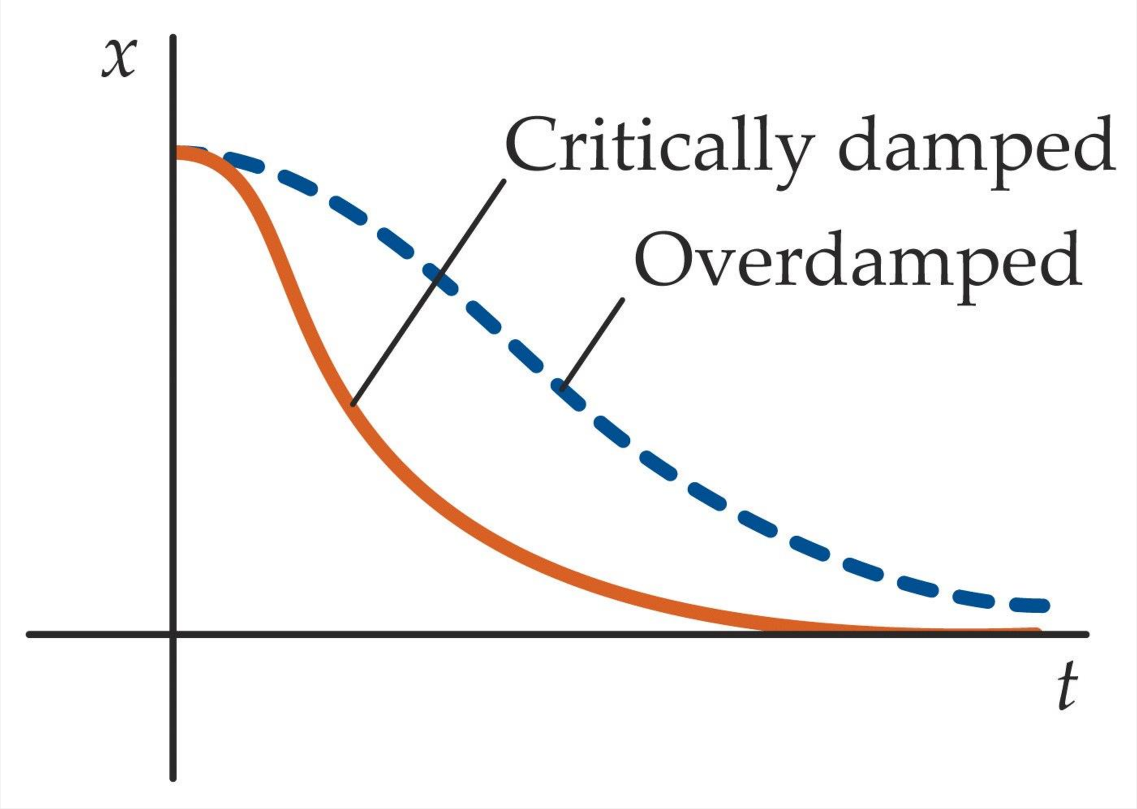
$$\omega' = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4\tau^2{\omega_0}^2}}$$

Temps d'extinció o constant de temps $\tau = \dfrac{m}{b}$



$$A = A_0 e^{-(b/2m)t} = A_0 e^{-t/2\tau}$$





Amortiment crític

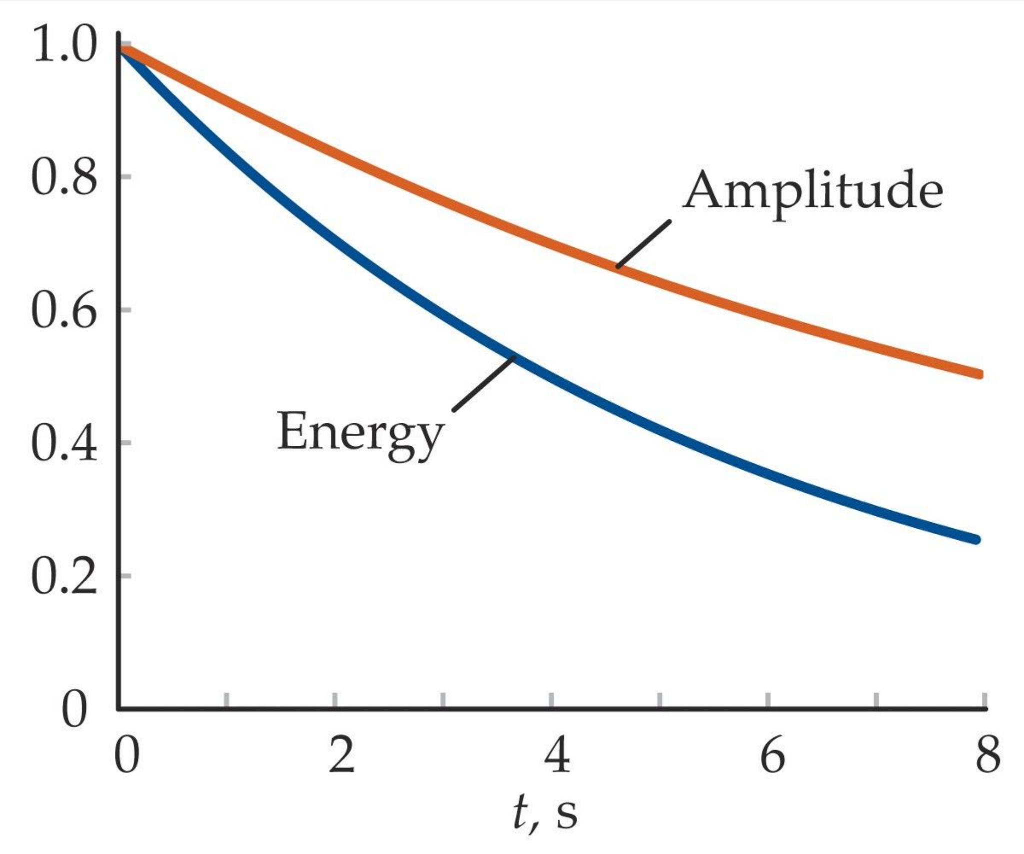
$$b = 2\sqrt{km}$$

Sobreamortiment

$$b > 2\sqrt{km}$$

$$x = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$$

9.5. Oscil·lacions amortides.



$$A = A_0 e^{-t/2\tau}$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \underbrace{\frac{1}{2} m\omega^2 A_0^2}_{} e^{-t/\tau}$$

$$E = E_0 e^{-t/\tau}$$

Es defineix el factor de qualitat:

$$Q = \omega_0 \tau$$

9.5. Oscil·lacions amortides.

El factor Q está relacionado con la pérdida relativa de energía por ciclo. Diferenciando la ecuación 14.38, se obtiene

$$dE = -\frac{1}{\tau} E_0 e^{-t/\tau}\, dt = -\frac{1}{\tau} E\, dt$$

Si la pérdida de energía por período es pequeña, podemos reemplazar dE por ΔE y dt por el período T. Por tanto $|\Delta E|/E$ en un período viene dado por

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q} \qquad \textbf{(14.40)}$$

o sea,

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{ciclo}}} \qquad \textbf{(14.41)}$$

Interpretación física de Q para un leve amortiguamiento

Así pues, Q es inversamente proporcional a la pérdida relativa de energía por ciclo.

$$\omega' \approx \omega_0 \sqrt{1-\left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

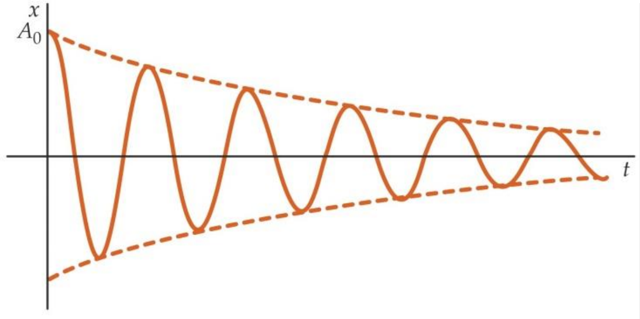
27 Siga un oscil· lador subamortit amb m=250g, k=85N/m, i b=70g/s. Trobeu:

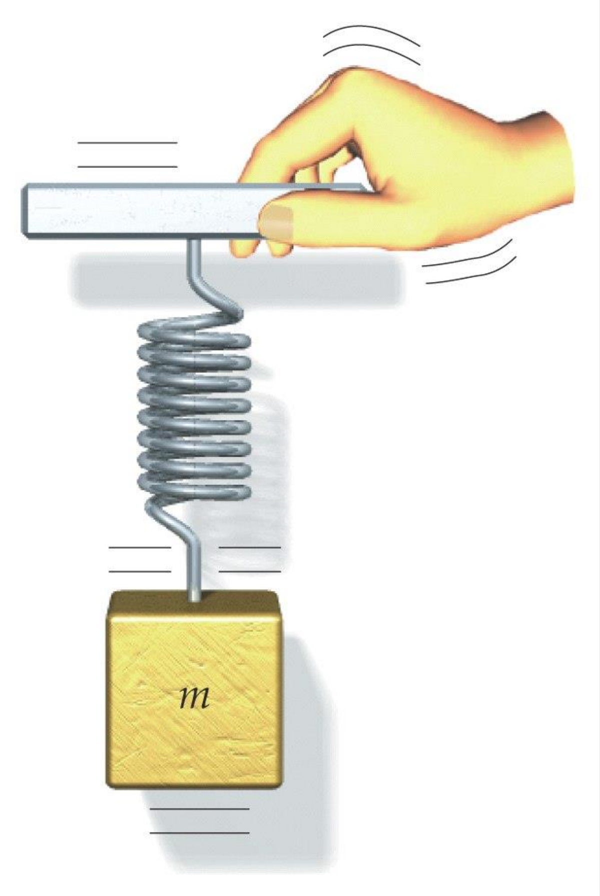
(a) El període del moviment.

(b) El temps de relaxació $\tau = m / b$.

(c) El temps que tarda l'amplitud de les oscil· lacions en reduir-se a la meitat del seu valor inicial.

(d) El temps que tarda l'energia mecànica en reduir-se a la meitat del seu valor inicial.





Equació de moviment

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos\omega_F t$$

Estímul extern

$$F_{ext}=F_0\cos\omega_F\, t$$

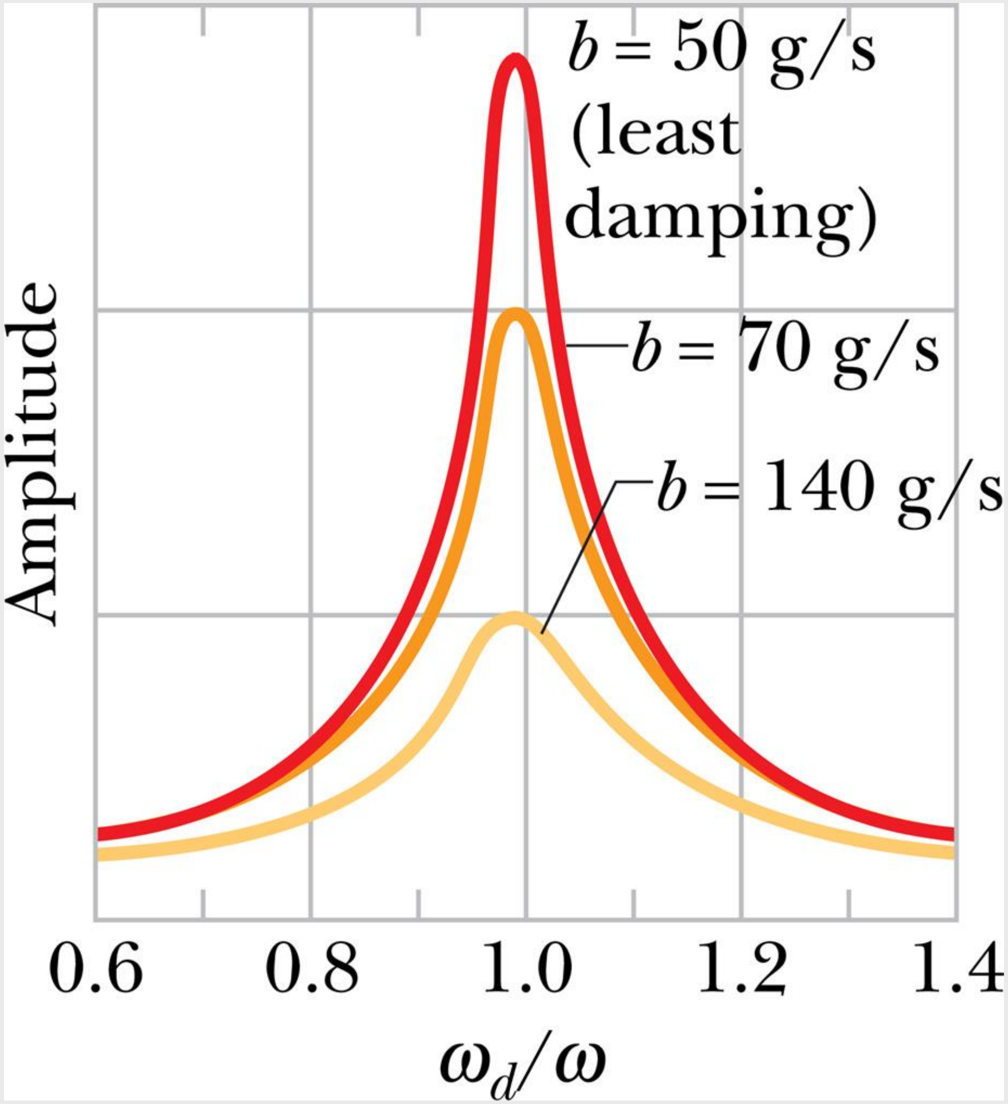
Règim estacionari

$$x=A\cos(\omega_F t-\delta)$$

constant de fase

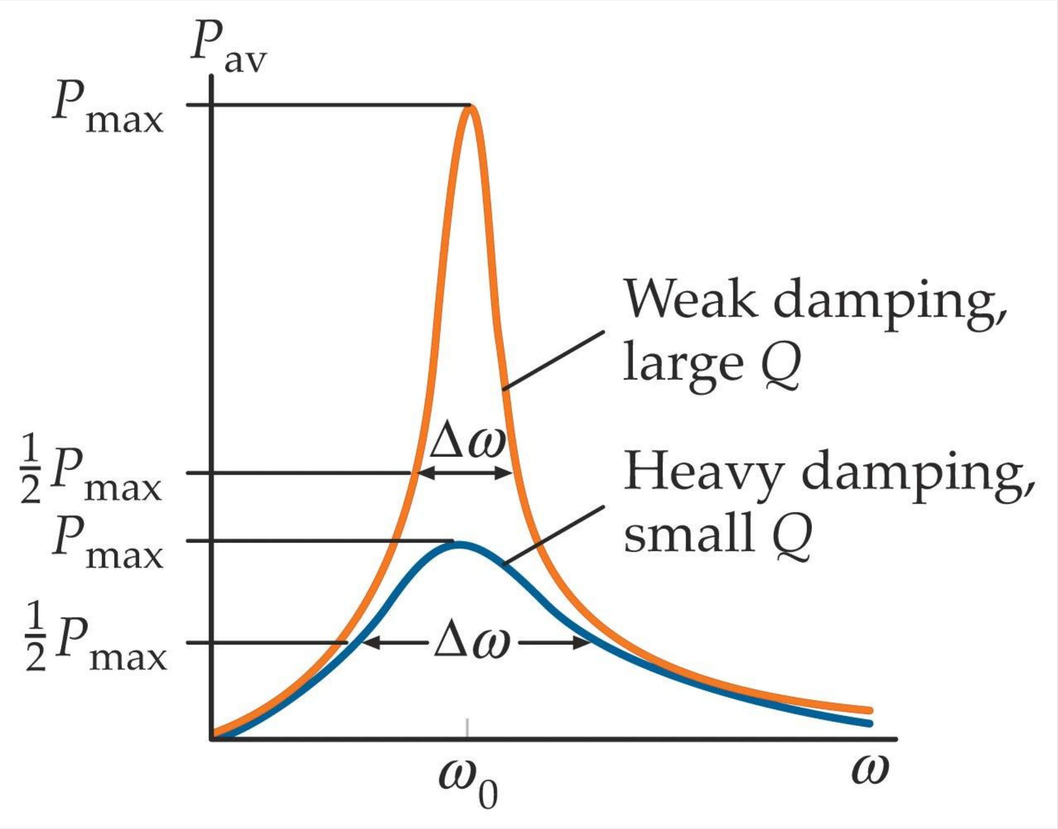
$$\tan\delta=\frac{b\omega_F}{m({\omega_0}^2-{\omega_F}^2)}$$

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/SHO/mass-force.html



Amplitud en funció de la freqüència externa

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2({\omega_0}^2 - {\omega_F}^2)^2 + b^2 {\omega_F}^2}}$$

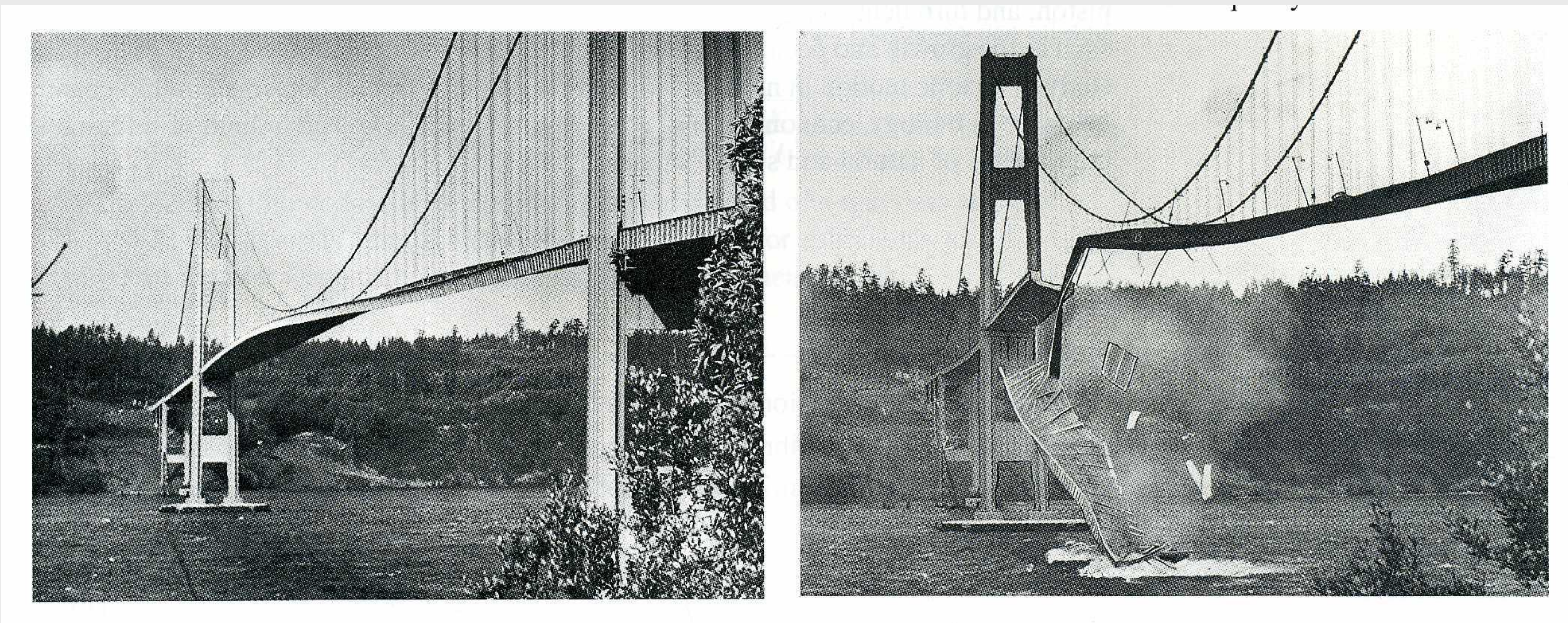


Potència en funció de la freqüència externa:
La sintonia millora quan el factor de qualitat és gran

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

9.6. Oscil·lacions forçades i ressonància.

La destrucció del pont de Tacoma és, probablement un dels més coneguts desastres resultat del fenómem de la ressonància



http://pruffle.mit.edu/3.016/Lecture_23_web/node1.html

video