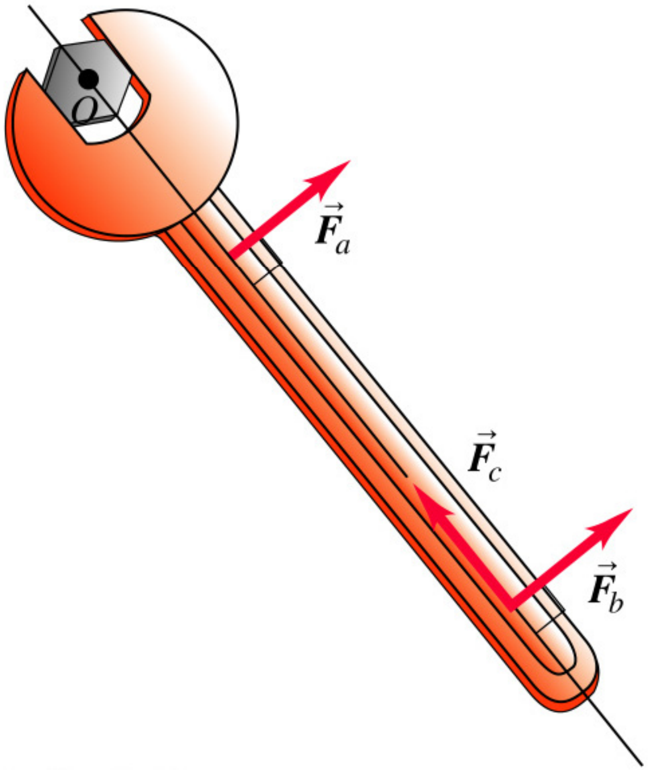
Física.
Tema 6.
Moment angular i sòlids rígids

6.1. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid.
6.2. Moment d'inèrcia.
6.3. Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix.
6.4. Energia en el moviment rotacional.
6.5. Rotació i traslació combinades.
6.6. Treball i potència en el moviment rotacional.
6.7. Moment angular.
6.8. Conservació del moment angular.

6.1. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid.

$$\tau = Fl$$

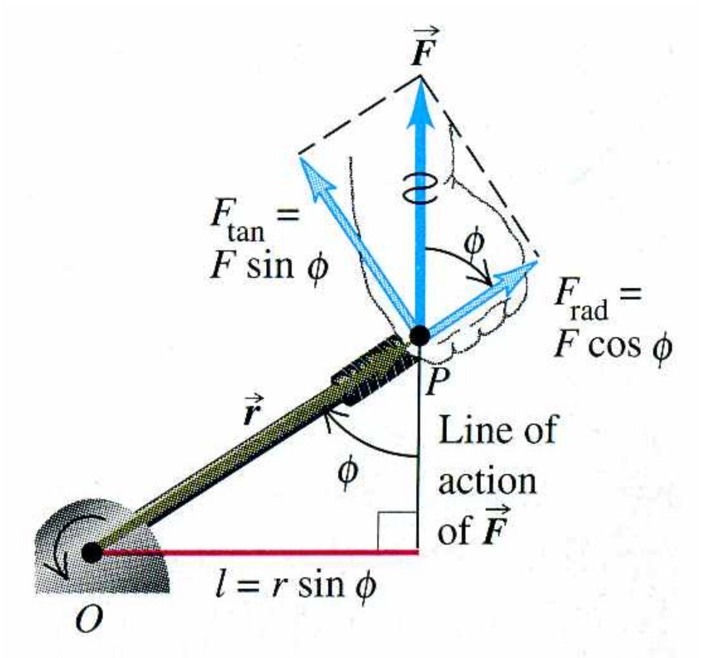


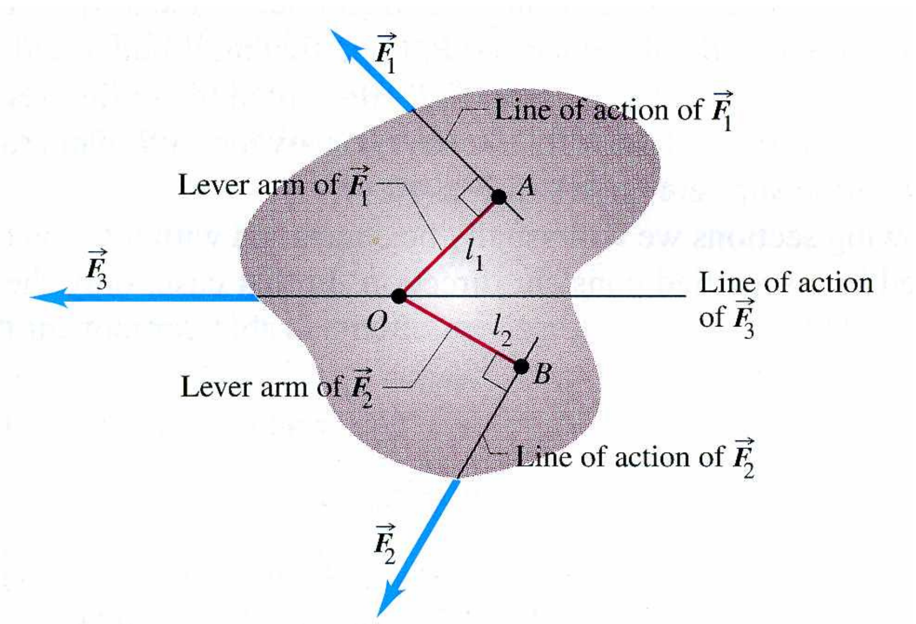
6.1. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid.

Moment de força

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

on $\vec{\mathbf{r}}$ és el vector que uneix el punt respecte del qual es calcula el moment fins el punt d'aplicació de la força

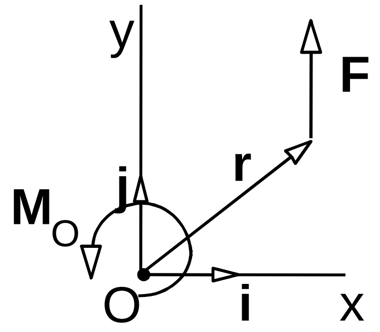




6.1. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid.

Moment de força

Descripció bidimensional



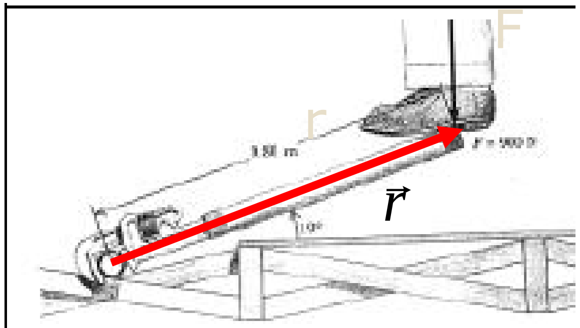
6.1. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid.

Moment de força

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Un plombaire de cap de setmana no pot afluixar una connexió d'un tub amb la seua clau de mordassa, així que li acobla un tros de tub de manera que li allarga el braç fins a 0.8m. Aleshores, li aplica tot el seu pes (900 N) al final del tub mentre aquest i la clau formen un angle de 19° amb l'horitzontal. Trobeu la magnitud i la direcció del moment aplicat sobre el centre de la canonada.

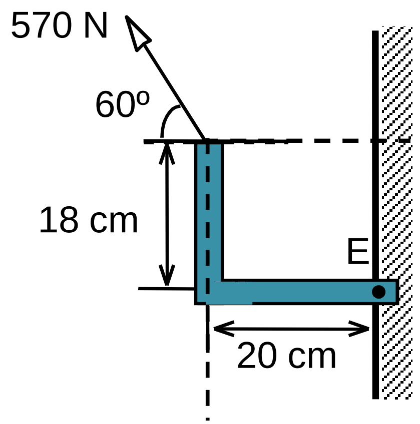
Sol.: 680 N m cap a dins del pla de la figura



6.1. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid.

Exemple 10.2.

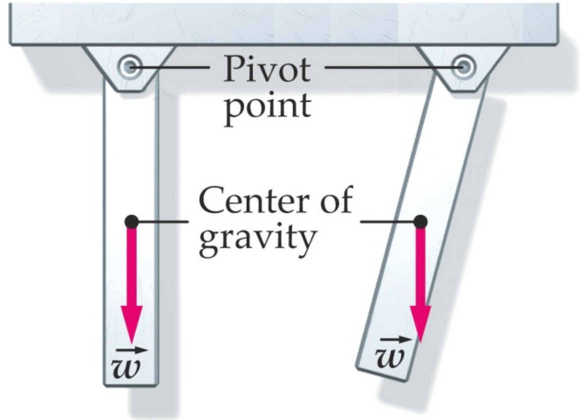
Una força de 570 N actua sobre un suport com s'indica a la figura. Determinem el moment de la força respecte del punt d'encastament del suport en la paret, *E*.

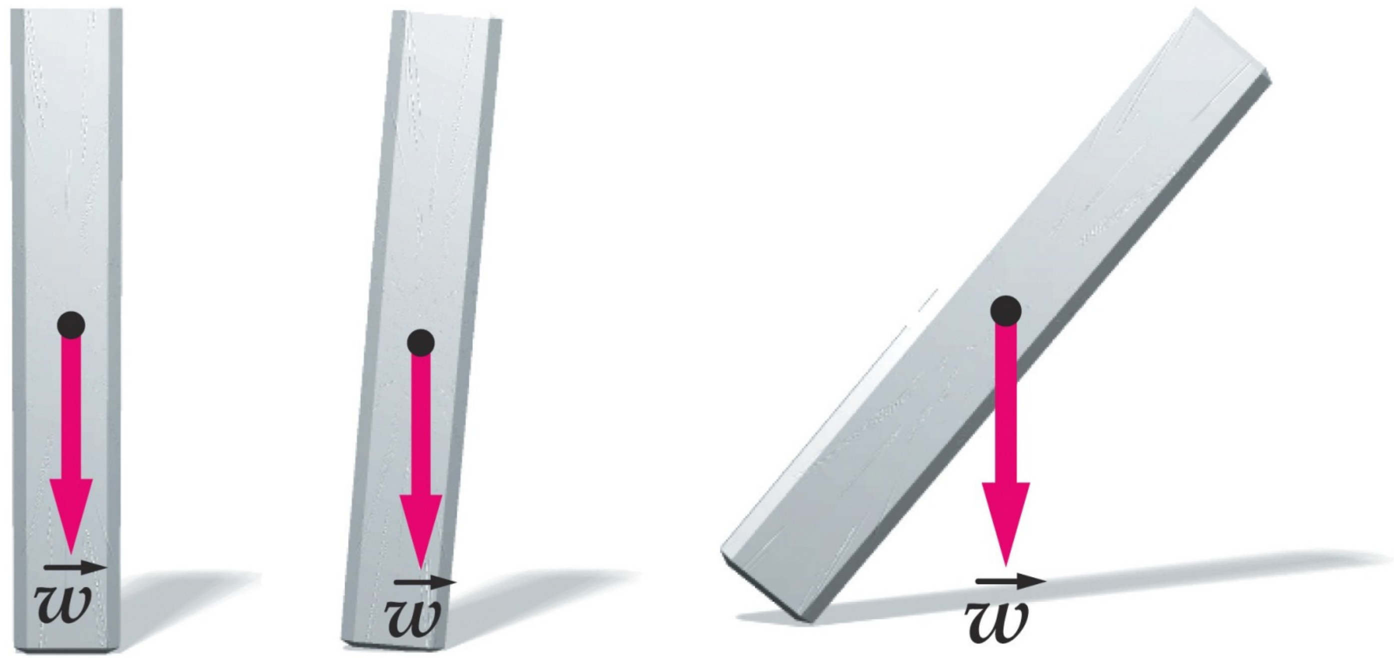


Sol: - 47.4 N m

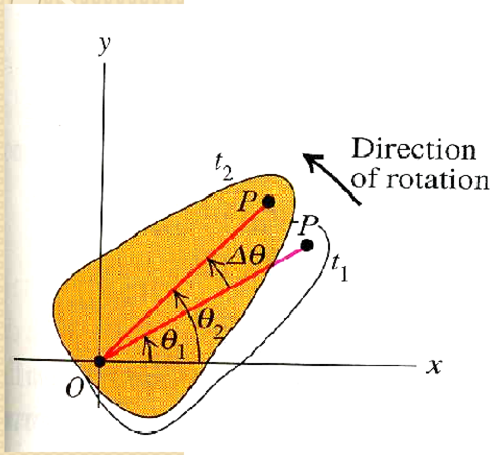
6.1. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid.

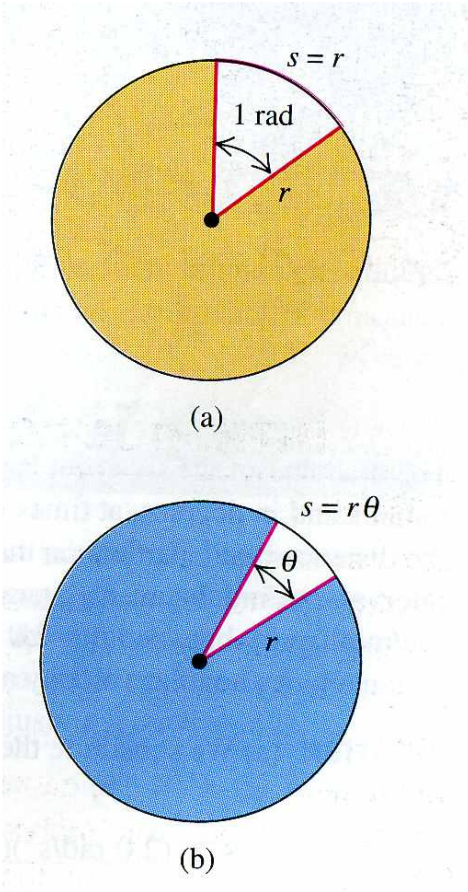
El pes s'aplica en el CM (centre de gravetat) per a calcular els moments.

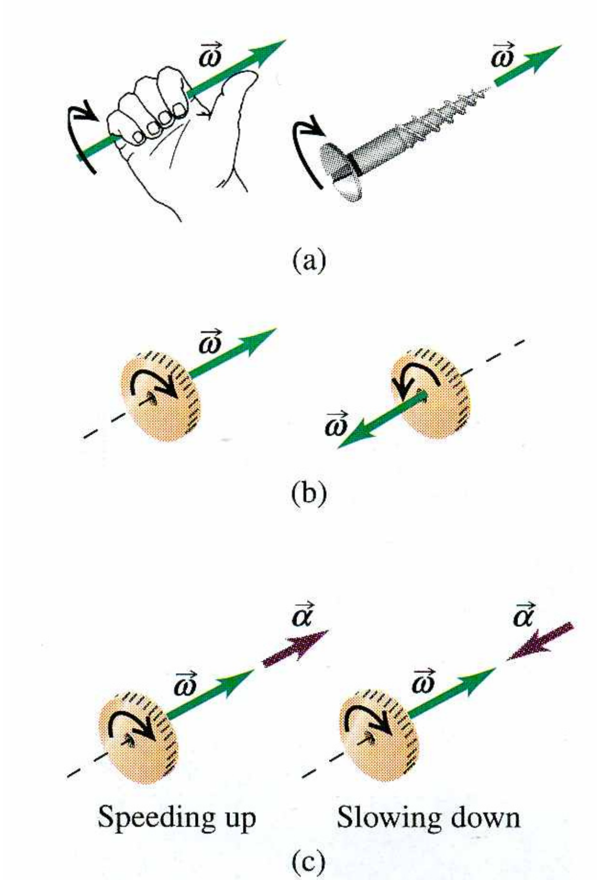




6.1. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid.





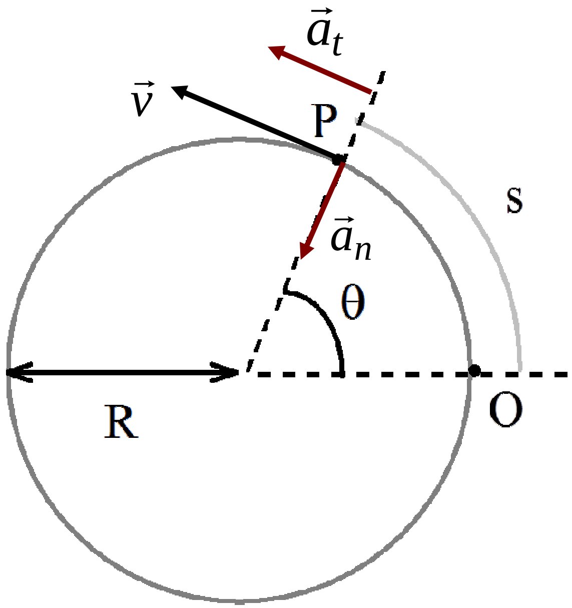


6.1. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid.

Resum moviment circular

Variables en el moviment circular:
$$\begin{cases} \theta \\ \omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ \alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Mov. linial:
$$\begin{cases} x \\ v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$



$$s = R\theta$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

6.2. Moment d'inèrcia

Moment d'inèrcia

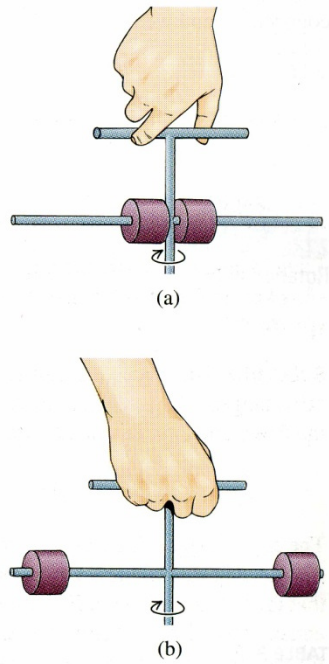
Sistemes formats per objectes discrets

$$I = \sum_i m_i r_i^{\,2}$$

Objectes amb la massa distribuïda

$$I = \int r^2 dm$$

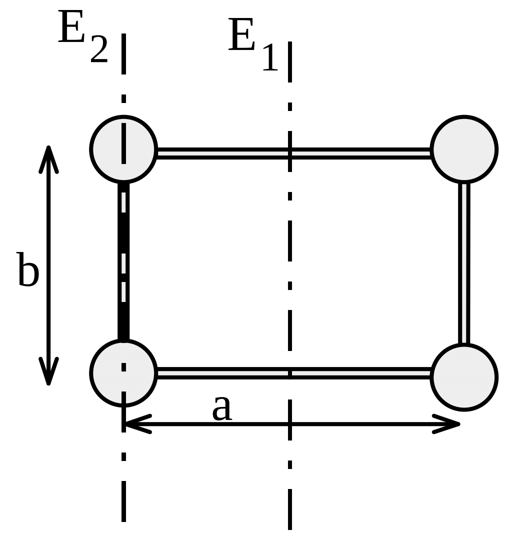
On *r* és ara la distància a l'eix de rotació, **no** el vector de posició respecte a l'origen del sist. ref.



9–12 An apparatus free to rotate around a vertical axis. The two cylinders of mass *m* can be locked into any position on the horizontal shaft. (a) If the two cylinders are located close to the rotation axis, the moment of inertia is small and it's easy to start the apparatus rotating. (b) If the cylinders are further from the rotation axis, the moment of inertia is greater and it's more difficult to start or stop the rotation.

6.2. Moment d'inèrcia

Quatre partícules de massa *m*, unides per varetes de massa negligible, formen un rectangle de costats *a* i *b*. Trobeu el moment d'inèrcia respecte dels eixos *E*1 i *E*2 indicats a la figura, i els respectius radis de gir.

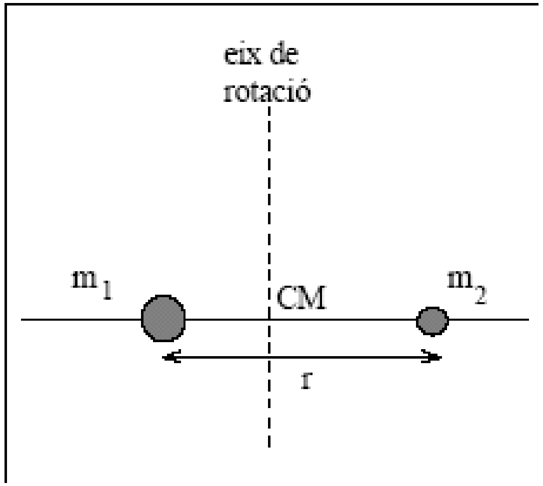


6.2. Moment d'inèrcia.

Demostreu que el moment d'inèrcia d'un sistema constituït per dues masses m_1 i m_2, separades una distància r, respecte d'un eix que passa pel centre de masses i és perpendicular a la línia que uneix les dues masses, és $I = \mu r^2$, sent μ la massa reduïda del sistema, que es defineix segons

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Apliqueu aquest resultat a la molècula de CO (r = 1.13 Å) i a la molècula de HCl (r = 1.27 Å).

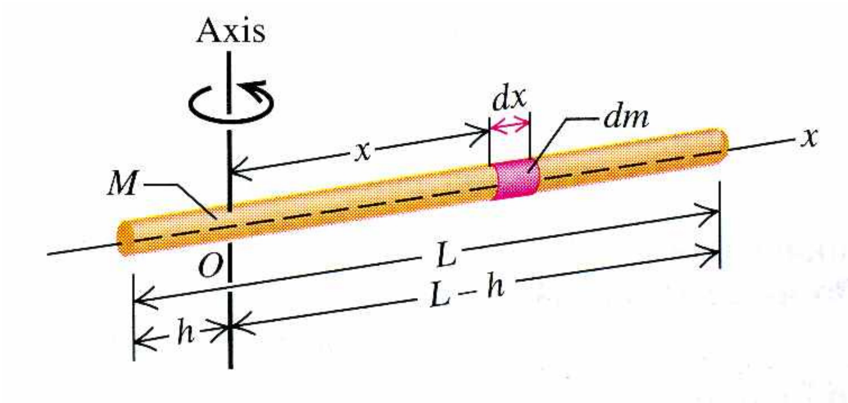


Per a una distribució contínua de massa

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$

Si la densitat és constant

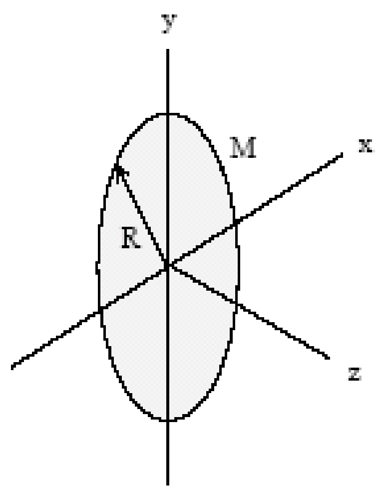
$$I = \rho \int r^2 dV$$



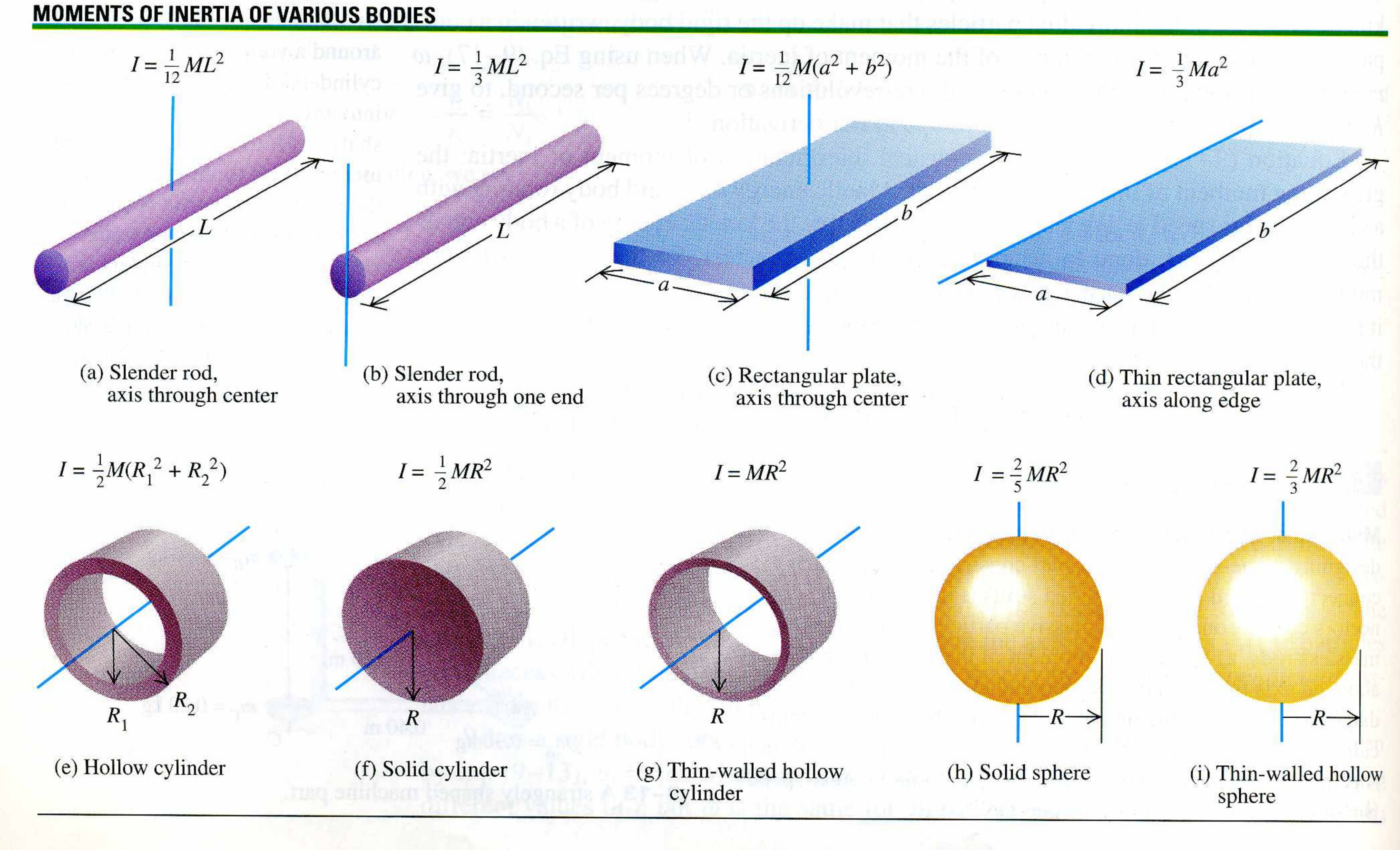
6.2. Moment d'inèrcia.

Trobeu el moment polar d'inèrcia I_z (respecte de l'eix z) d'un disc de massa M i radi R.

Sol: $I_z = \dfrac{1}{2} MR^2$.



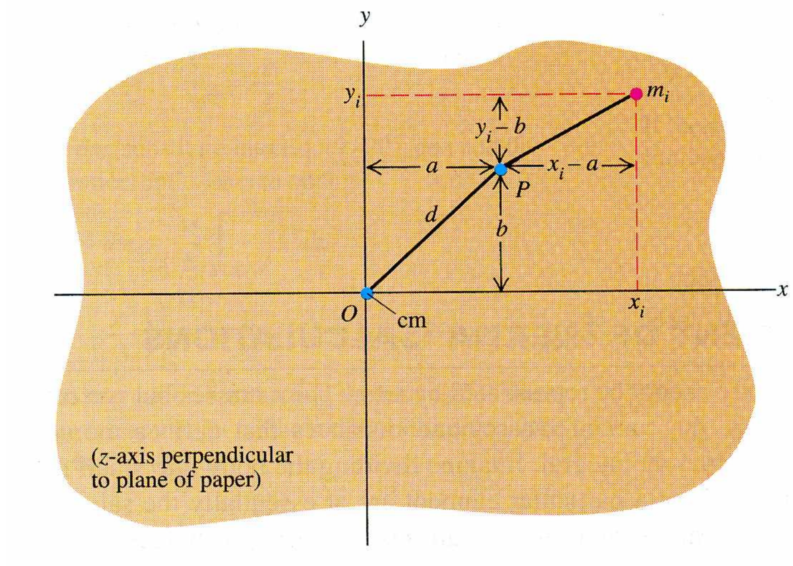
6.2. Moment d'inèrcia



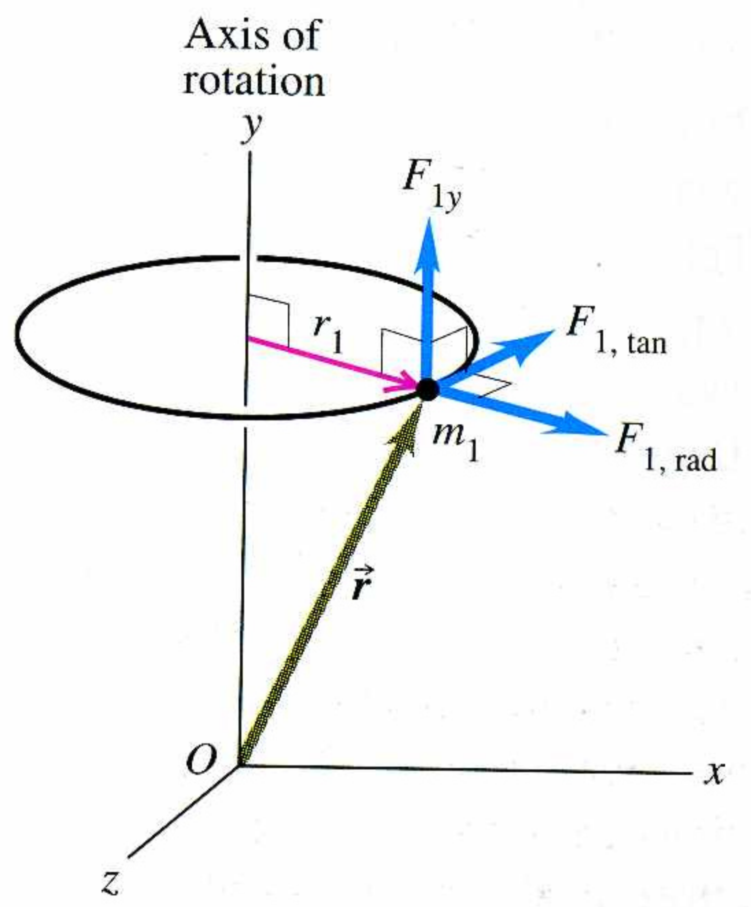
6.2. Moment d'inèrcia.

Teorema dels eixos paral.lels (Steiner)

$$I_P = I_{cm} + Md^2$$



6.3. Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix



Anàleg rotacional de la segona llei de Newton per a un sòlid rígid

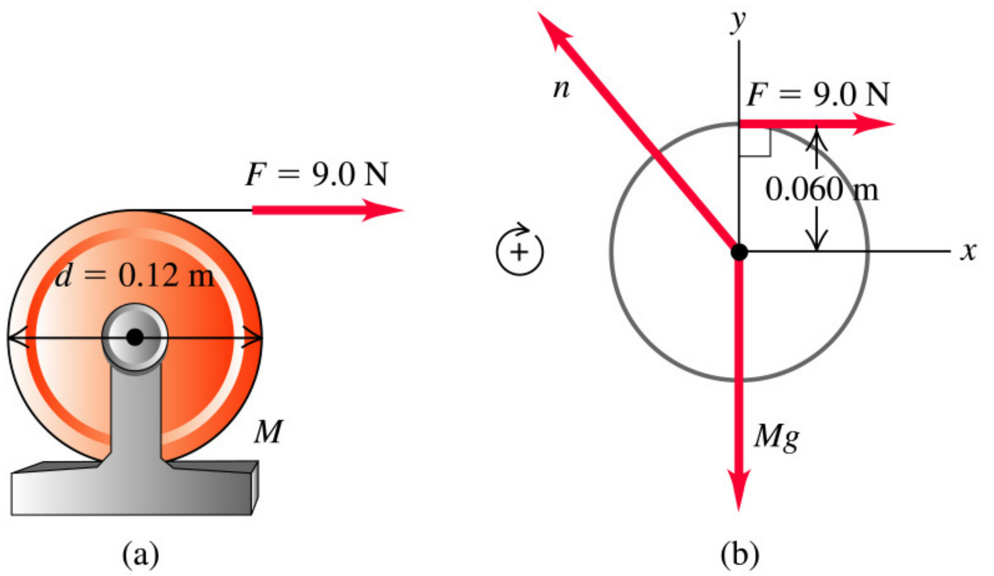
$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Si el moment de forces i l'acceleració angular son paral.les:

$$\sum \tau = I\alpha$$

6.3. Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix

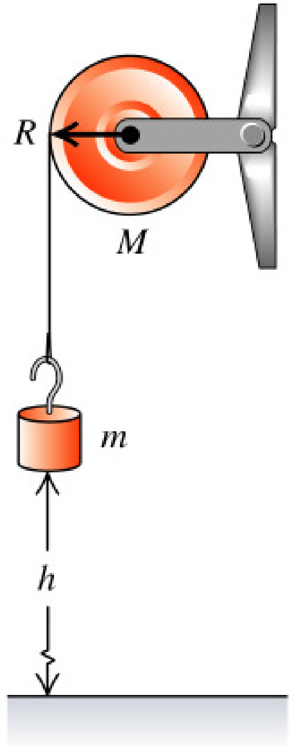
Exemple: cable que es desemrrotlla en una corriola



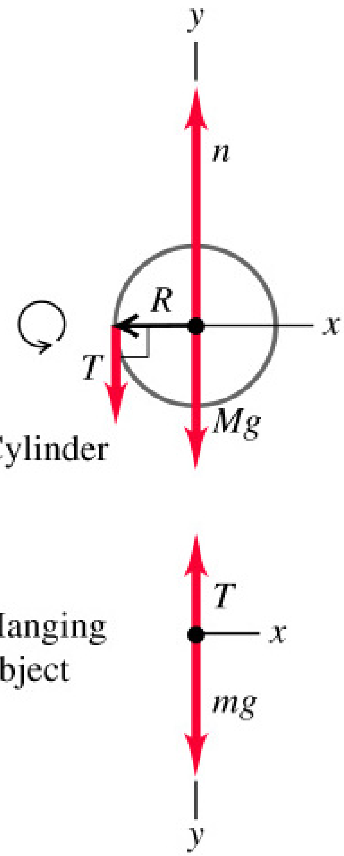
6.3. Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix

Es té una corda enrotllada en una politja massisa de radi R i massa M. Si de la corda penja una massa m, trobeu l'acceleració de la massa m i l'acceleració angular del disc de la politja.

Sol.: $a = \dfrac{g}{1+2m/M}$



(a)



(b)

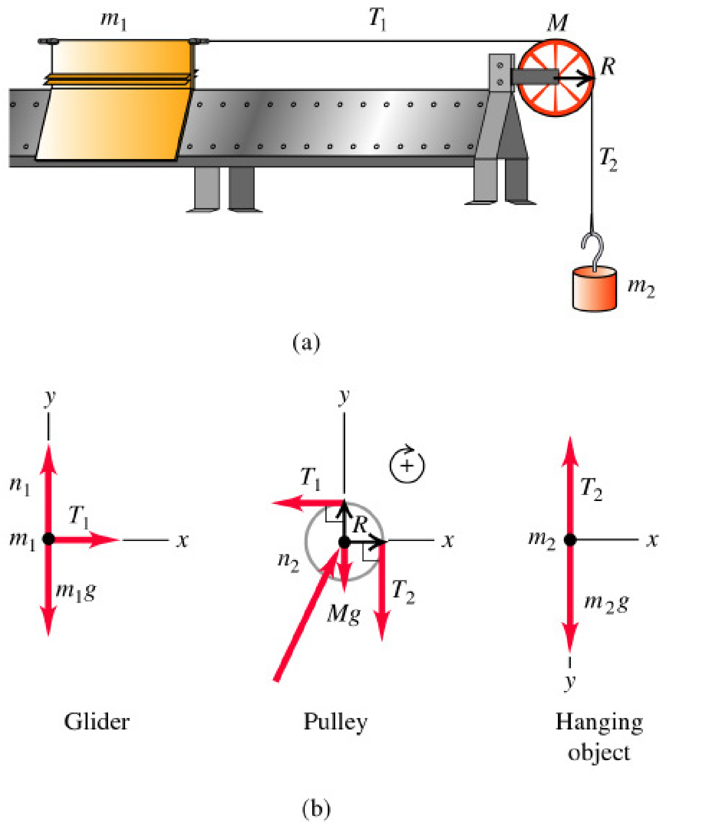
6.3. Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix

Un pati, de massa m_1, llisca sense fricció per un carril pneumàtic horitzontal per l'acció d'una massa m_2 a la que està nuat mitjançant una corda de massa negligible que passa per una politja de massa M, radi R i moment d'inèrcia $I = MR^2$ col·locada al final del carril. Si la corda no patina en la politja, calculeu:

a) L'acceleració de cada cos

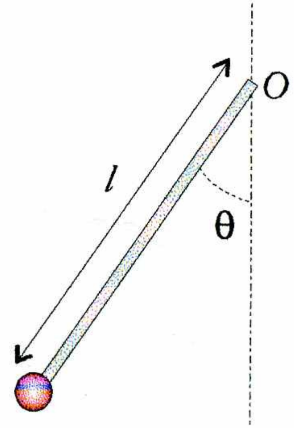
b) L'acceleració angular de la politja

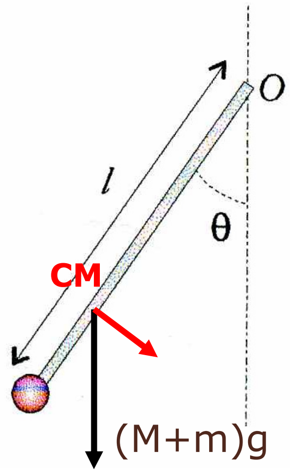
c) La tensió de la corda a cada part de la politja



6.4. Moment de força i acceleració angular per a un sòlid rígid

Una barra de longitud L té una bola de massa M fixada a un extrem. La barra, de massa (sense la bola) m, penja de l'altre extrem en un punt fix O, i pot girar al seu voltant. Si la barra forma inicialment, en repòs, un angle θ respecte de la vertical, i la deixem girar lliurement, ¿quina serà la seua acceleració angular en l'instant en què l'hem soltada?



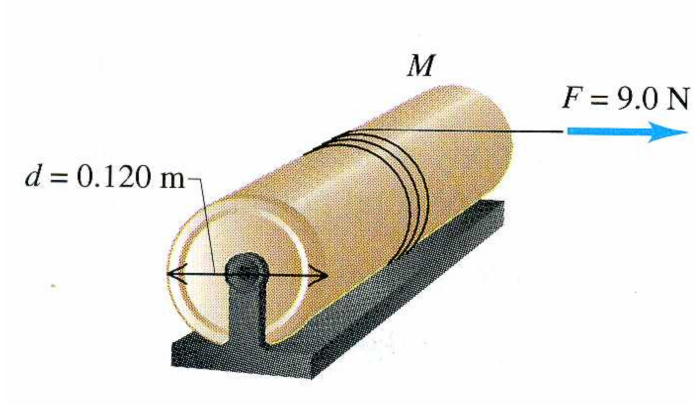


6.4. Energia en el moviment rotacional

L’energia cinètica de rotació es defineix com

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

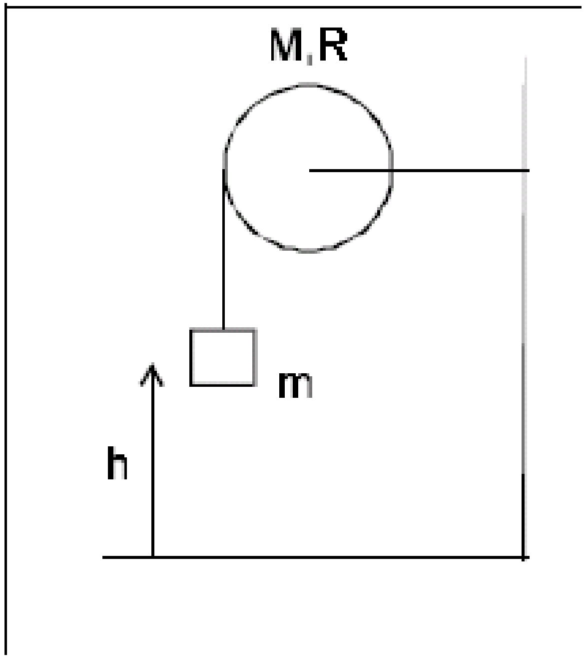
Un cable està enrotllat diverses voltes al voltant d’un cilindre sòlid de massa 50 kg i i diàmetre 0.12 m, que gira al voltant d’un eix horitzontal que passa pel seu centre i que està fixat per dos suports sense fregament. El cable s’estira amb una força constant de 9 N una distància de 2 m de manera que, en desenrotllar-se sense lliscar, fa girar el cilindre. Si el cilindre estava inicialment en repòs, trobeu la seua velocitat angular i també la velocitat final del cable.



6.4. Energia en el moviment rotacional

Per comprovar la conservació de l'energia en un moviment rotacional, s'enrotlla un cable lleuger i flexible al voltant d'un cilindre sòlid de massa M i radi R. El cilindre gira amb un fregament negligible respecte d'un eix horitzontal fix. El final lliure del cable es nua a un objecte de massa m que es deixa caure des d'una altura h respecte del terra amb velocitat inicial zero. Trobeu la velocitat de l'objecte i la velocitat angular del cilindre en el moment que el primer toca terra.

Sol.: $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + M/2m}}$



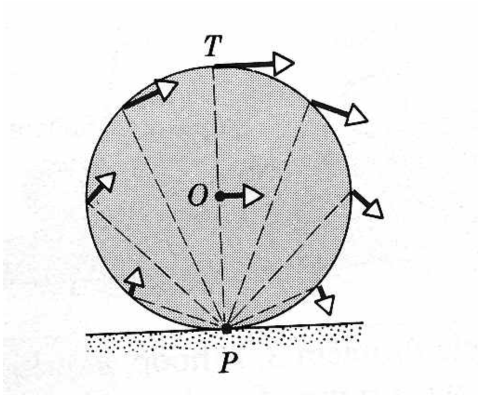
Energia potencial d'un cos extens

$$U = Mgy_{cm}$$

6.5. Rotació i traslació combinades.

Rodament sense lliscament

$$v_{cm} = R\omega$$



6.5. Rotació i traslació combinades.

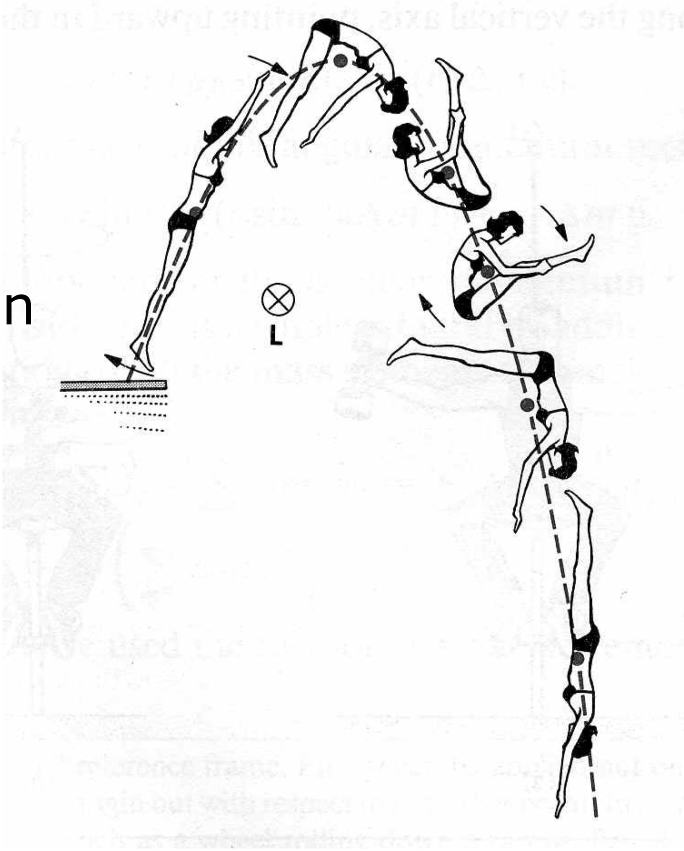
Dinàmica del sòlid rígid en translació i rotació

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = M\vec{\mathbf{a}}_{cm}$$

$$\sum \tau = I_{cm}\alpha$$

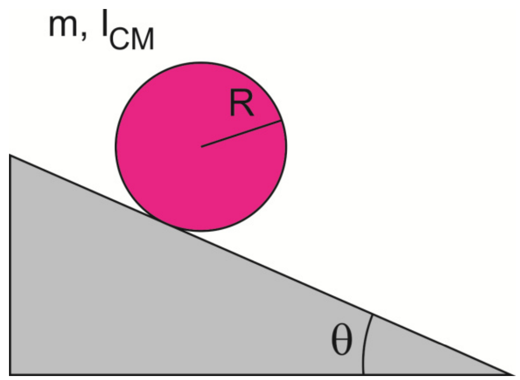
Aquestes equacions són vàlides quan l'eix de rotació es mou, si:

1. L'eix passa pel CM i és un eix de simetria
2. L'eix no canvia de direcció



6.5. Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix en moviment.

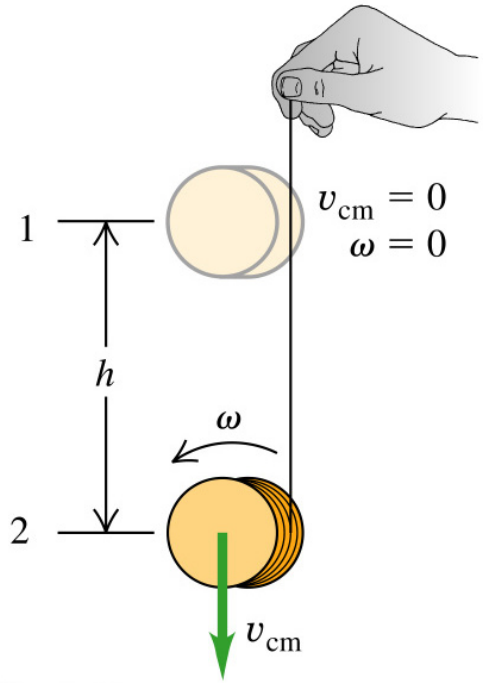
- Un cos de massa m, moment d'inèrcia ICM i radi R, roda sense lliscar per un pla inclinat un angle . Calcula l'acceleració lineal del CM.



6.5. Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix en moviment.

Un io-io primitiu es fa enrotllant un cordell varies vegades al voltant d'un cilindre sòlid de massa M i radi R. Si es manté el final del cordell subjecte mentre es deixa anar el cilindre, el cordell es desenrotlla sense lliscar ni estirar-se mentre el cilindre cau i gira.

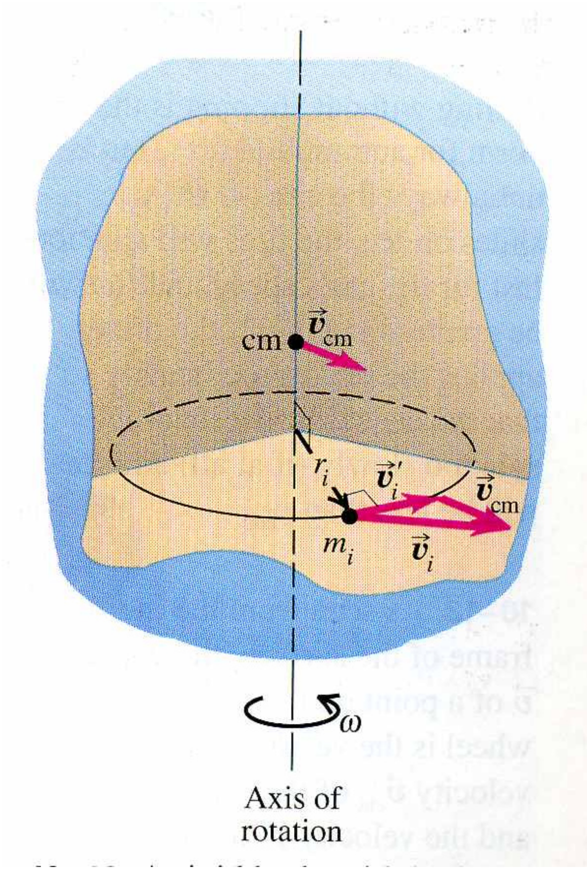
Apliqueu les equacions dinàmiques i trobeu l'acceleració del cilindre i la tensió de la corda.



6.5. Rotació i traslació combinades.

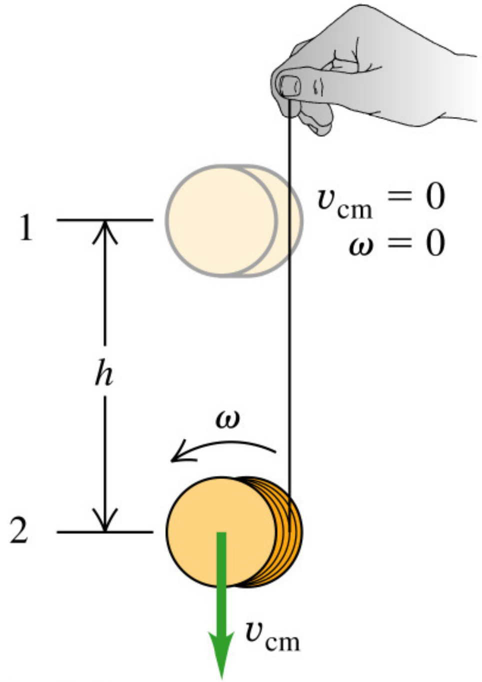
Energia cinètica per a un sòlid rígid en translació i rotació

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}{}^{2} + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^{2}$$



6.5. Rotació i traslació combinades.

Un io-io primitiu es fa enrotllant un cordell varies vegades al voltant d'un cilindre sòlid de massa M i radi R. Si es manté el final del cordell subjecte mentre es deixa anar el cilindre, el cordell es desenrotlla sense lliscar ni estirar-se mentre el cilindre cau i gira. Utilitza consideracions energètiques per trobar la velocitat v_{CM} del centre de masses del cilindre després d'haver caigut una distància h.



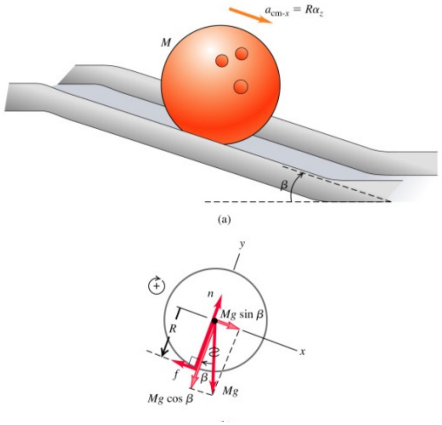
6.5. Rotació i traslació combinades.

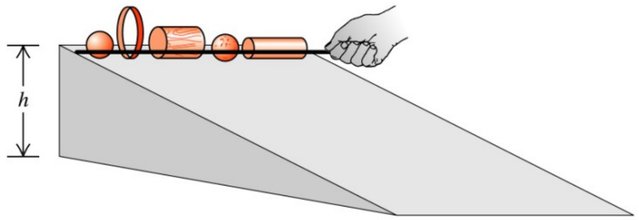
Problema

Un cos de massa *M*, radi exterior *R* i moment d'inèrcia respecte de l'eix de simetria *I* roda sense lliscar per un pla inclinat un angle θ des d'una altura h

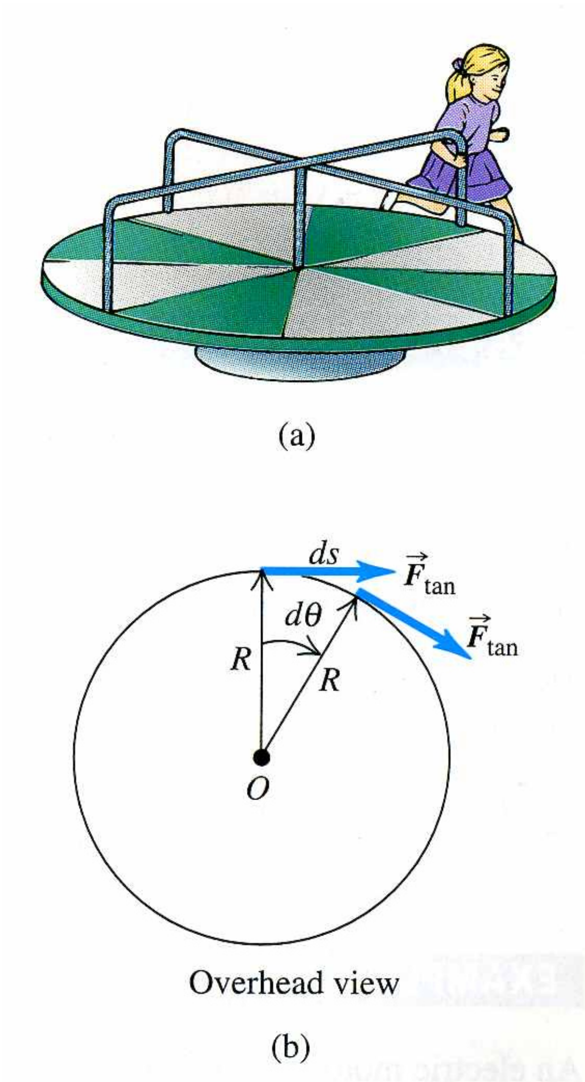
Calculem la velocitat amb que arriba a la base..

Particularitzem ara al cas d'un cilindre, una esfera i un cèrcol, tots tres amb el mateix radi R, massa M, i coeficient de fregament estàtic μ.





6.6. Treball i potència en el moviment rotacional



(a)

(b)

Treball

$$dW = \vec{F}d\vec{s}$$

$$dW = F_{\tan} R d\theta$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta$$

Teorema del treball-energia

$$W_{tot} = \frac{1}{2} I\omega_2^{\ 2} - \frac{1}{2} I\omega_1^{\ 2}$$

Potència

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega$$

6.6. Treball i potència en el moviment rotacional

La màxima potència del motor d'un cotxe són 200 CV a 6000 rpm. Quin és el corresponent parell motor?

Un motor elèctric realitza un parell motor constant $\tau = 10$ Nm sobre una pedra d'esmolar muntada en el seu eix. El moment d'inèrcia de la pedra és $I = 2$ kg m^2. Si el sistema comença a moure des del repòs, trobeu el treball fet pel motor en 8 s, l'energia cinètica de la pedra en eixe instant i la potència mitjana lliurada pel motor.

6.7. Moment angular.

Moment angular d'una partícula

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}}$$

$$L = mvr\sin\phi$$

Velocitat de canvi del moment angular

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\boldsymbol{\tau}}}$$

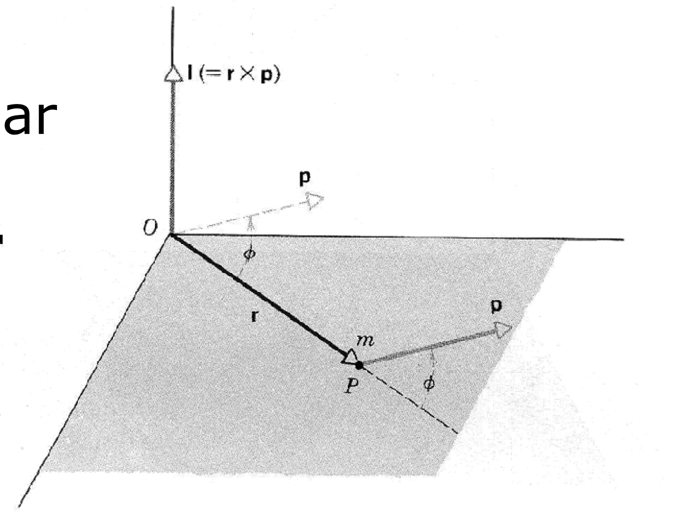
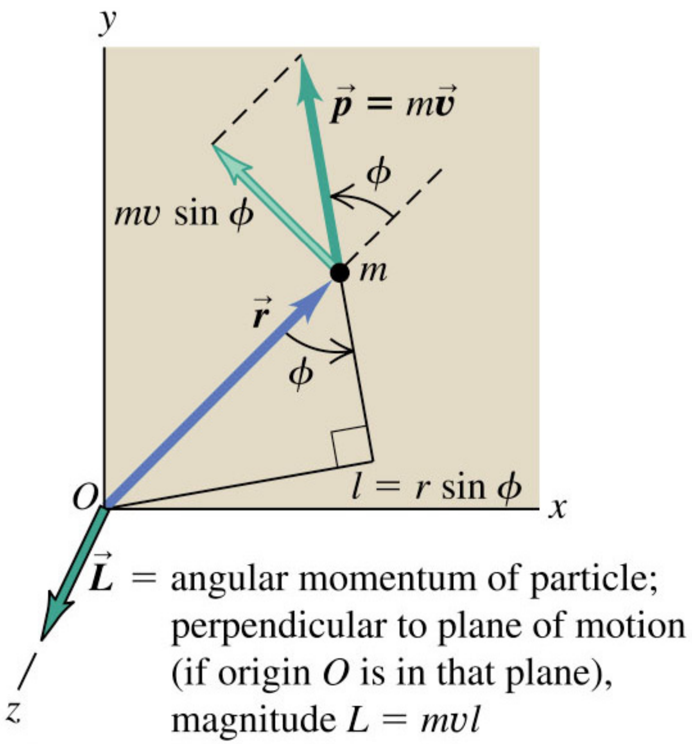


Figure 10 Defining angular momentum. A particle of mass *m* at point *P* has a linear momentum **p** (= *m***v**), assumed to lie in the *xy* plane. The particle has an angular momentum ***l*** (= **r** × **p**) with respect to the origin *O*. The angular momentum vector points in the direction of increasing *z*.

6.7. Moment angular.

Moment angular d'una partícula

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}}$$



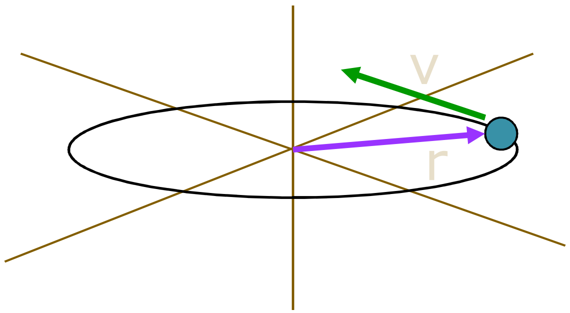
6.7. Moment angular.

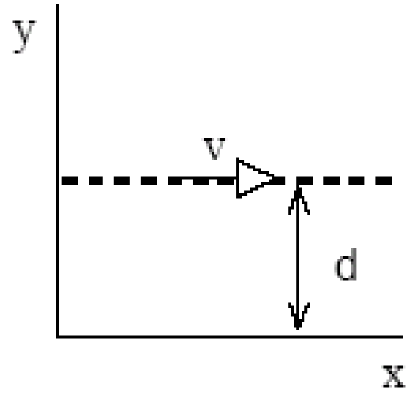
Calculeu el moment angular de:

a) Una partícula de massa m que es mou en el pla x-y en un cercle de radi R centrat a l'origen amb velocitat constant v.

b) Una partícula de massa m que es mou en el pla x-y amb velocitat constant v, en la recta paral·lela a l'eix x a distància d d'ell, com es mostra a la figura.

Sol.: a) $-mdv\mathbf{k}$; b) $mRv\mathbf{k}$





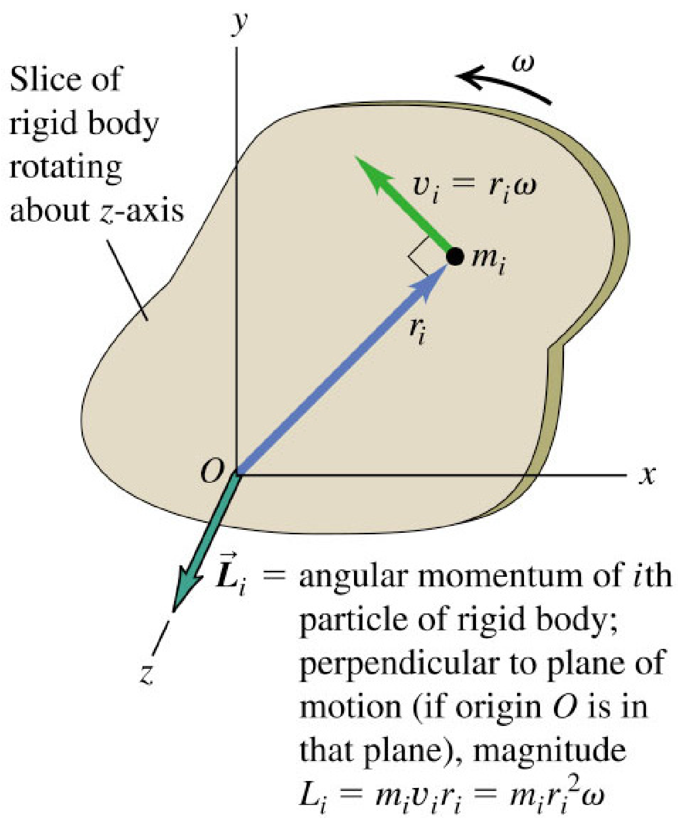
Moment angular d'una partícula en l'inia recta

http://www.phys.hawaii.edu/~teb/java/ntnujava/equalArea/equalArea.html

6.7. Moment angular.

Moment angular d'un sòlid rígid.
Per a una secció del sòlid:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = (\sum m_i r_i^{\,2})\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$



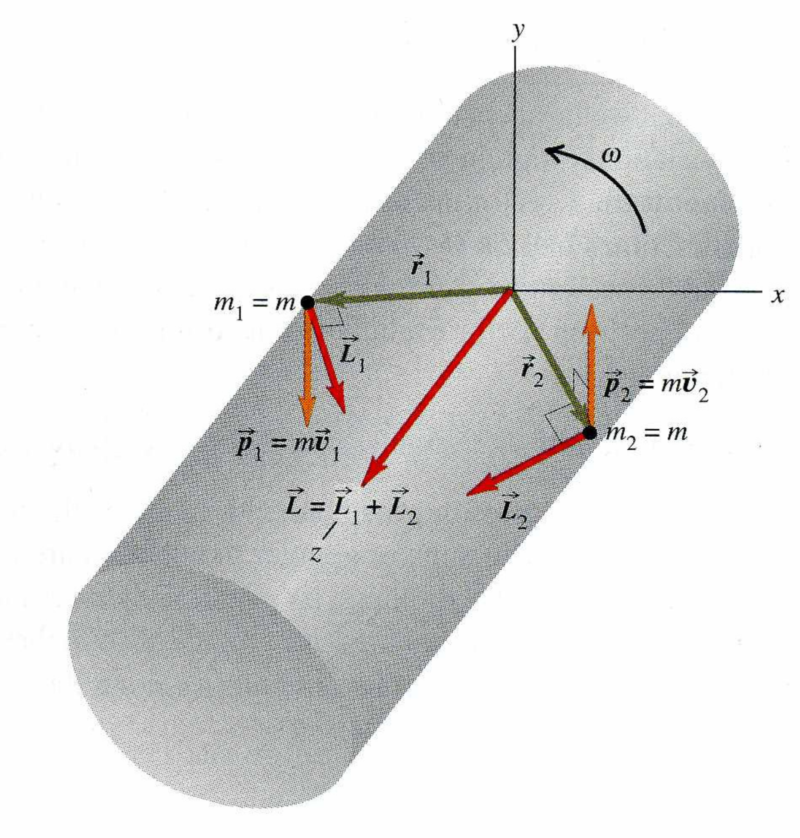
6.7. Moment angular.

Moment angular d'un sòlid rígid que gira sobre un eix de simetria

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

La magnitud és

$$L = I\omega$$



6.7. Moment angular.

Per a qualsevol sistema de partícules

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

Per a un sòlid rígid que gira sobre un eix de simetria

$$L = I\omega$$

I derivant obtenim l'equació dinàmica

$$\sum \tau = I\alpha$$

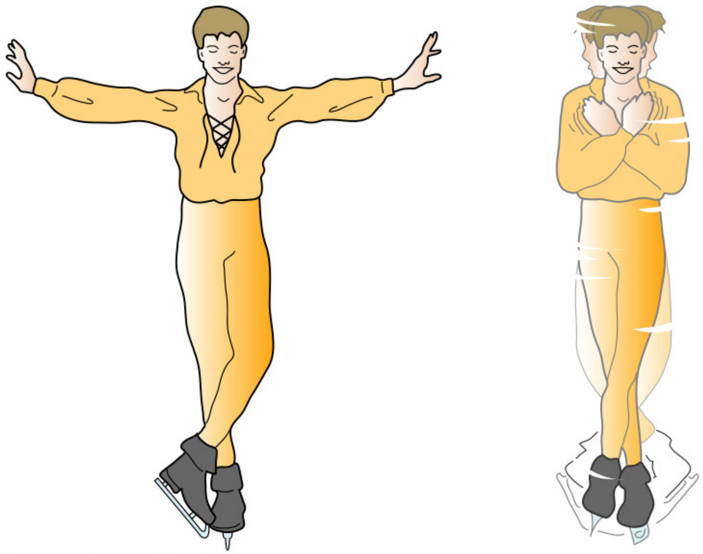
6.8. Conservació del moment angular.

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

Si el moment resultant de les forces externes és zero

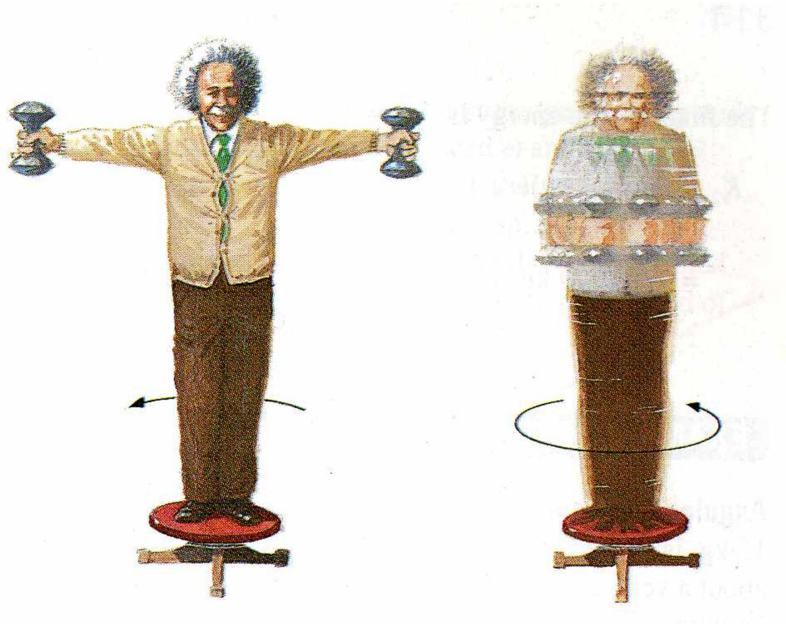
$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0$$

El moment angular total del sistema és constant.



6.8. Conservació del moment angular.

Un professor està al damunt d'una taula rotatòria mantenint els braços estesos horitzontalment amb unes peses de 5 kg en cada mà. La taula gira de manera que el professor dona una volta sobre si mateix cada 2 s. Trobeu la seua nova velocitat angular si col· loca les peses al seu estómac i discuteix com això afecta l'energia cinètica. El seu moment d'inèrcia (sense peses) val 3.0 kg m^2 quan te els braços oberts i 2.2 kg m^2 quan els tanca. La posició de les peses està inicialment a 1 m de l'eix i a 0,2 m d'ell al final.



6.8. Conservació del moment angular.

Una barra de fusta, de massa *M* i longitud *b*, està suspesa del seu extrem superior al voltant del qual por girar lliurement. Inicialment la barra està penjant vertical en repòs. Es dispara una bala de massa *m* a l'extrem inferior de la barra, que entra en la barra a velocitat *v* i s'hi queda insertada.
¿Quin angle màxim puja la barra?

.