Física.
Tema 5.
Moment lineal i centre de masses

UNIVERSITAT JAUME·I

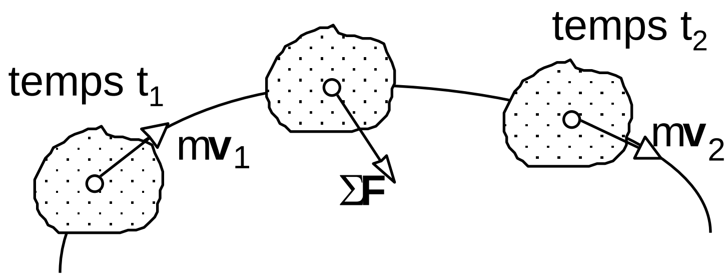
5.1. Moment lineal.
5.2. Conservació del moment lineal.
5.3. Col·lisions.
5.4. Centre de masses.
5.5. Moviment del centre de masses.

5.1. Moment lineal

Es defineix la quantitat de moviment lineal o, simplement, moment lineal com $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$

Considerem un cos que es mou sota l'acció d'un conjunt de forces. La llei del moviment és

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{d}\,\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{d}t}$$



Si integrem respecte del temps obtenim

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}\mathbf{d}t = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$$

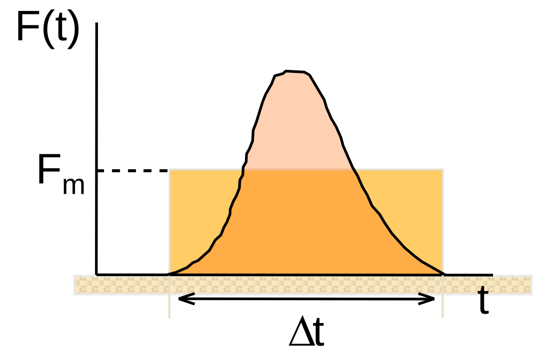
La quantitat de l'esquerra s'anomena *impuls lineal*, i el resultat és el *principi de l'impuls i la quantitat de moviment lineal*:

“L'impuls aplicat a un cos durant un interval de temps és igual al canvi de la seua quantitat de moviment lineal.”

5.1. Moment lineal

En una col·lissió, una força variable actua entre el objectes que col·lisionen, durant el curt temps que dura la col·lisió. Definim la *força mitjana*,

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{mitjana} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}} \mathbf{d}t$$

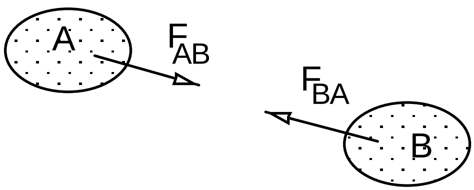


Aleshores el canvi de moment lineal es pot escriure

$$\Delta t \sum \vec{\mathbf{F}}_{mitjana} = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$$

5.2. Conservació del moment lineal

Considerarem ara diversos cossos en interacció i veurem que en aquells casos en què es pot ignorar la influència de forces externes, el moment lineal total es conserva.



Siguen dos cossos *A* i *B*, que interaccionen mútuament, sent $\mathbf{F}_{AB}$ la força que exerceix *B* sobre *A* i $\mathbf{F}_{BA}$ la força que exerceix *A* sobre *B*. Segons la tercera llei de Newton,

$$\vec{\mathbf{F}}_{AB} + \vec{\mathbf{F}}_{BA} = 0$$

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{int}} = 0$$

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{int}} + \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{dt}} \longrightarrow \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{dt}}$$

$$\boxed{si \quad \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0 \rightarrow \vec{\mathbf{p}} = ct}$$

5.2. Conservació del moment lineal

Si la influència d'altres forces a banda de les indicades és negligible, podem aplicar el principi de l'impuls i la quantitat de moviment a cadascun dels cossos *A* i *B* de la següent manera

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}_{AB} \mathrm{d}t = \vec{\mathbf{p}}_{A2} - \vec{\mathbf{p}}_{A1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}_{BA} \mathrm{d}t = \vec{\mathbf{p}}_{B2} - \vec{\mathbf{p}}_{B1}$$

En sumar aquestes dues equacions obtenim

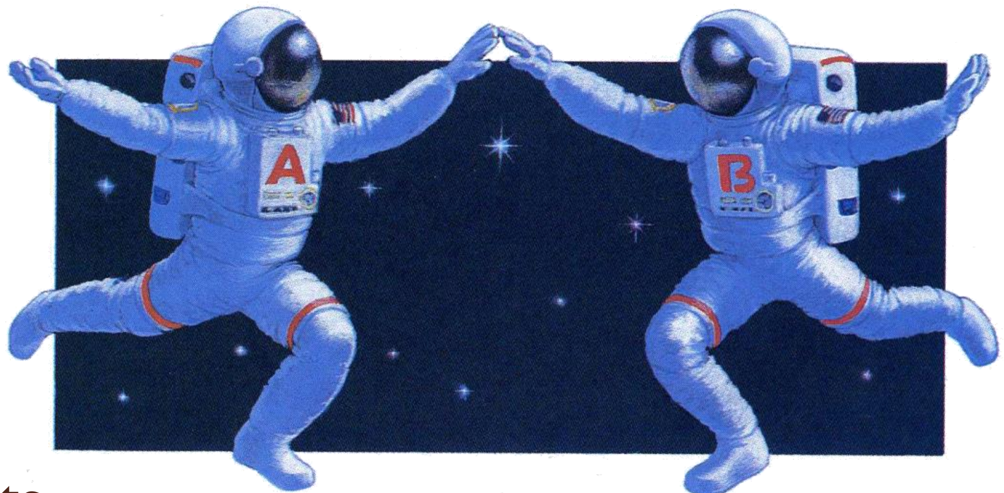
$$\vec{\mathbf{p}}_{A1} + \vec{\mathbf{p}}_{B1} = \vec{\mathbf{p}}_{A2} + \vec{\mathbf{p}}_{B2}$$

i així, la quantitat de moviment lineal *total* es conserva

$$\boxed{\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = const.}$$

5.2. Conservació del moment lineal

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}_{AB} \mathbf{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}_{BA} \mathbf{d}t$$



(a)

$$\Delta \vec{\mathbf{p}}_A = -\Delta \vec{\mathbf{p}}_B$$

Si inicialment estaven parats

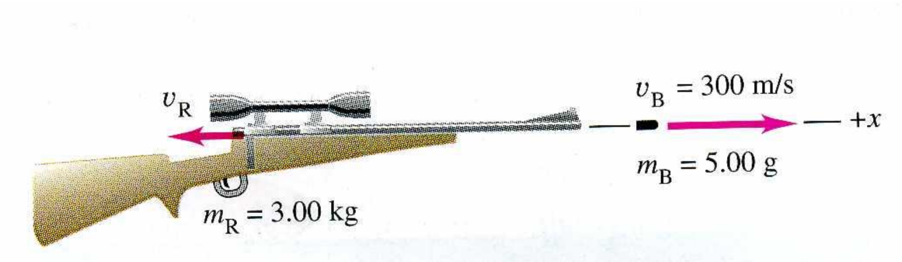
$$\vec{v}_A = -\frac{m_B}{m_A} \vec{v}_B$$

5.2. Conservació del moment lineal

5.2. Conservació del moment lineal

En una demostració, es subjecta un rifle de 3 kg de manera que pot retrocedir lliurement després de ser disparat. Si es dispara una bala de massa 5g amb una velocitat de 300 m/s, calculeu

a) La velocitat de retrocés del rifle
b) El moment lineal de la bala i la seua energia cinètica.
c) El moment lineal del rifle i la seua energia cinètica.

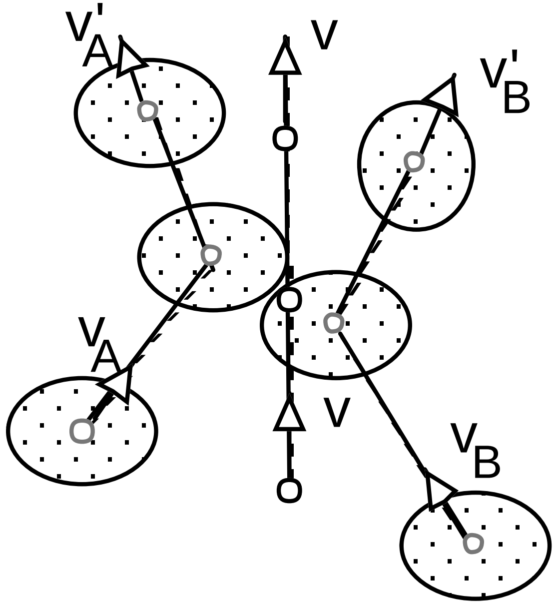


5.3. Col·lisions

Si podem negligir l'efecte de les forces externes, el moment lineal total es conserva,

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}\,'_A + \vec{p}\,'_B$$

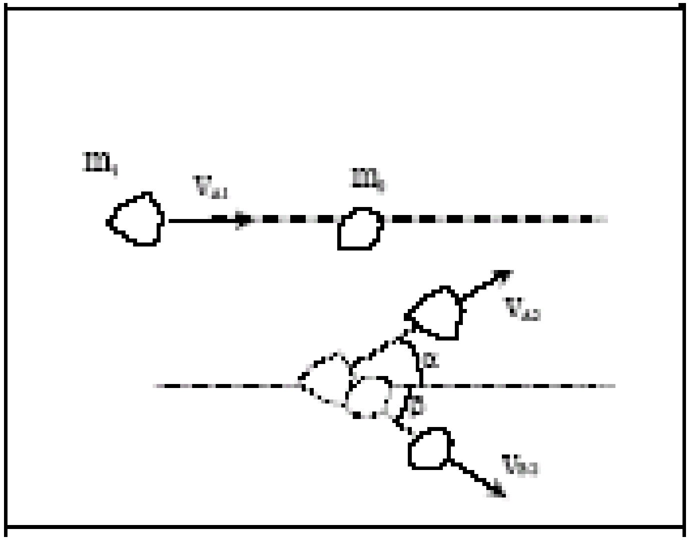
$$m_A \vec{\mathbf{v}}_A + m_B \vec{\mathbf{v}}_B = m_A \vec{\mathbf{v}}'_A + m_B \vec{\mathbf{v}}'_B$$



5.3 Col·lisions

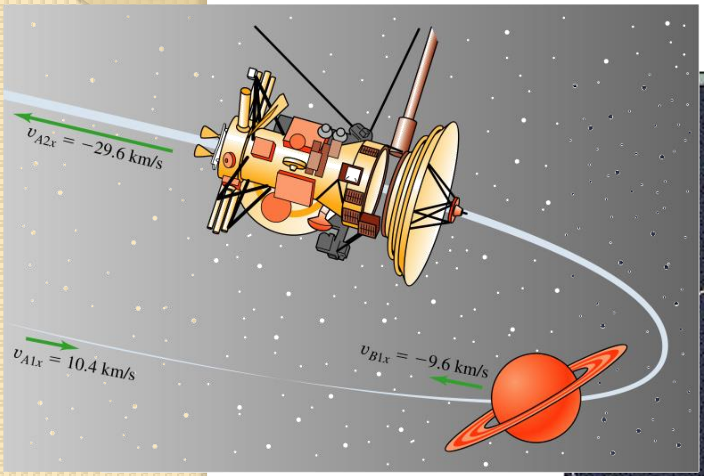
Un glaçó de gel de massa m_A = 5 kg es llisca sobre una superficie gelada a una velocitat inicial v_{Ai} = 2 m/s i fins xocar amb un altre tros de massa m_B = 3 kg que inicialment estava en repòs. Després del xoc, la velocitat del primer glaçó és v_{Af} = 1 m/s i forma un angle de 30 amb la direcció inicial. Quines són la velocitat final i l'angle del segon tros de gel?

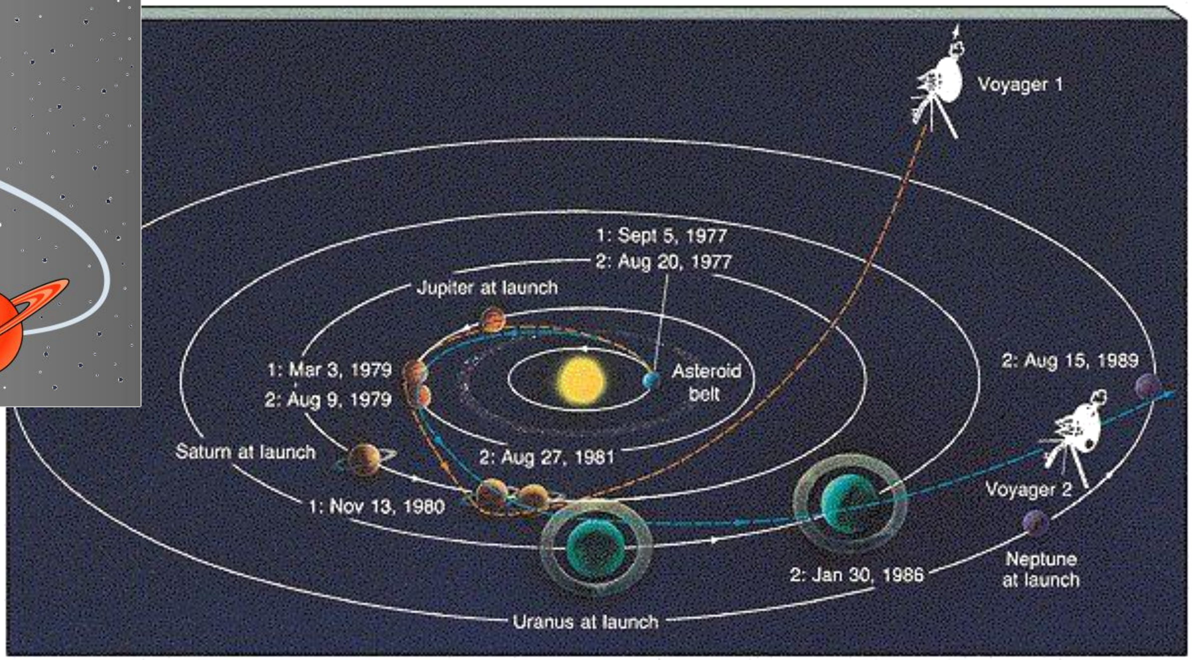
Sol: v_{Bf} = 2.1 m/s, β = -24°



5.3. Col.lisions

Impuls gravitacional





Voyager 1 & 2 (llançades en 1977) utilitzaren la gravetat de Jupiter per dirigir-se a Saturn i la de Saturn per anar més enllà. Abandonen el sistema solar en 2013.

5.3. Col·lisions

S'anomena una col·lisió *elàstica* quan l'energia cinètica total del sistema de partícules es manté constant durant la col·lisió, és a dir

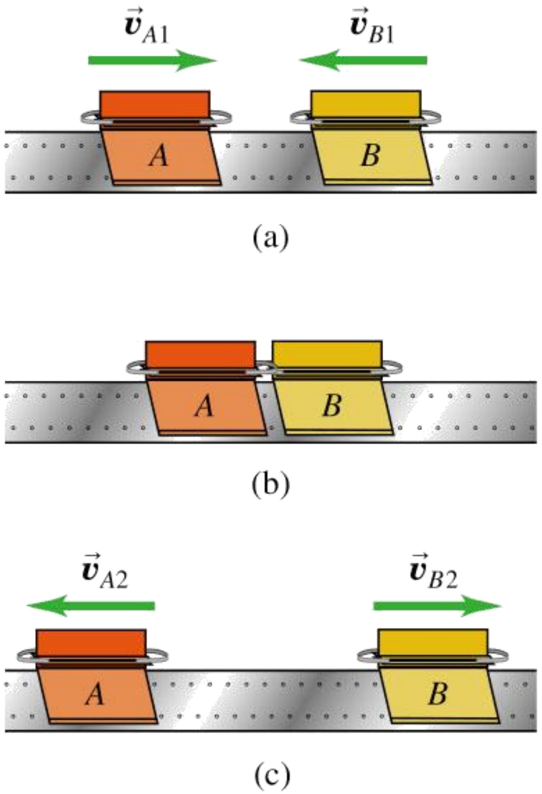
$$K_T = K'_T$$

$$K_A + K_B = K'_A + K'_B$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A_1}{}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B_1}{}^2 = \frac{1}{2} m_A v'_{A_2}{}^2 + \frac{1}{2} m_B v'_{B_2}{}^2$$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B$$

$$m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_1} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_1} = m_A \vec{\mathbf{v}}'_{A_2} + m_B \vec{\mathbf{v}}'_{B_2}$$



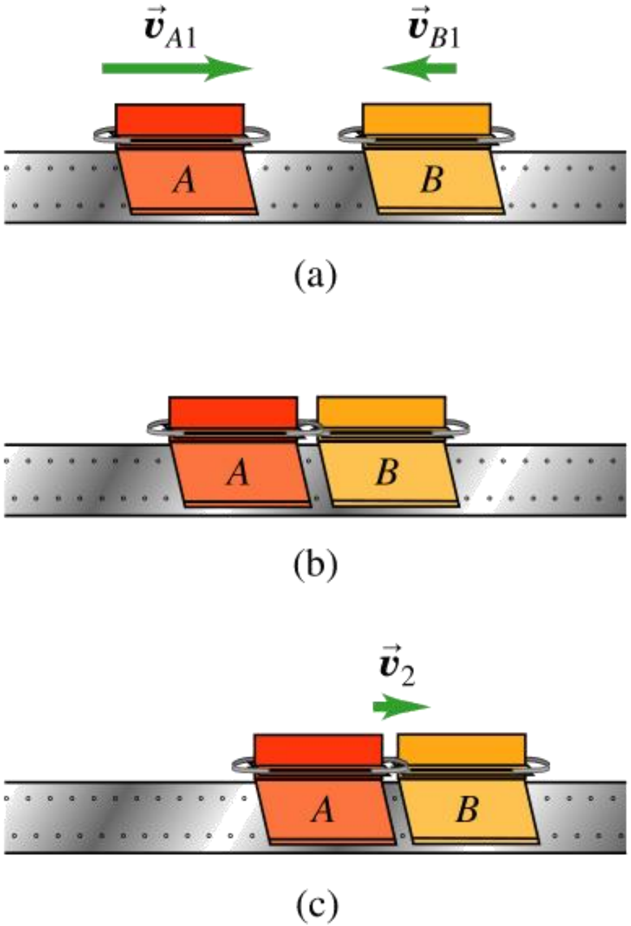
5.3. Col·lisions

Una col·lisió en què els dos cossos s'apeguen i continuen units després de la col.lisió, s'anomena totalment inelàstica o plàstica

$$K \neq K'$$

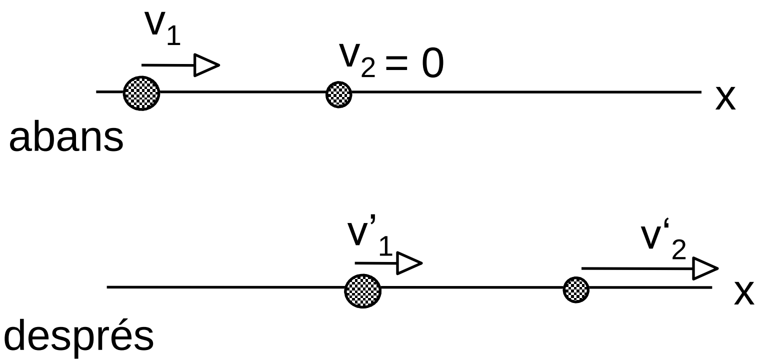
$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B$$

$$m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_1} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_1} = (m_A + m_B)\vec{\mathbf{v}}'_2$$



5.3. Col·lisions

Col.lisions directes



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v' + m_2 v'_2$$

$$v'_2 - v'_1 = -e(v_2 - v_1)$$

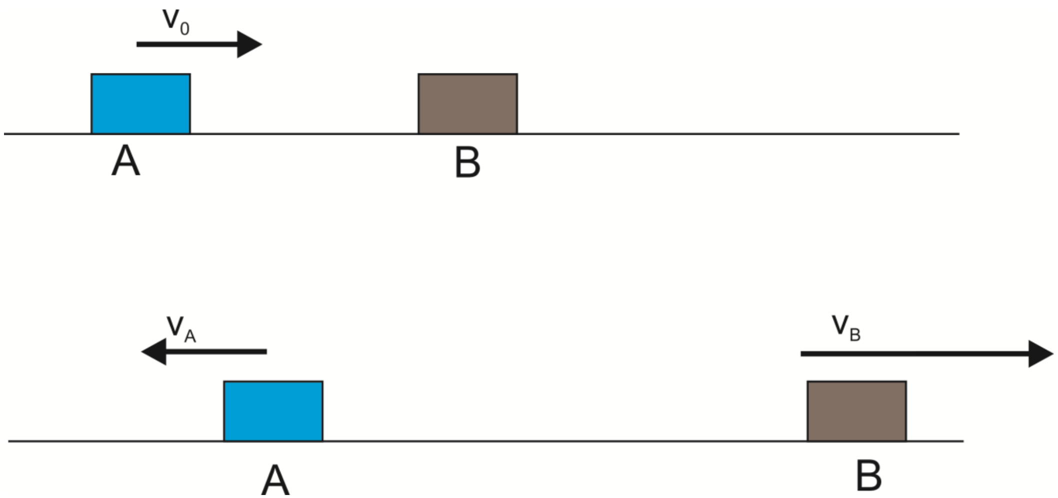
e es defineix com el coeficient de restitució

En col.lisions elàstiques, e=1

En col.lisions inelàstiques, $0 \leq e < 1$

5.3. Col·lisions

Col.lisions directa elàstica

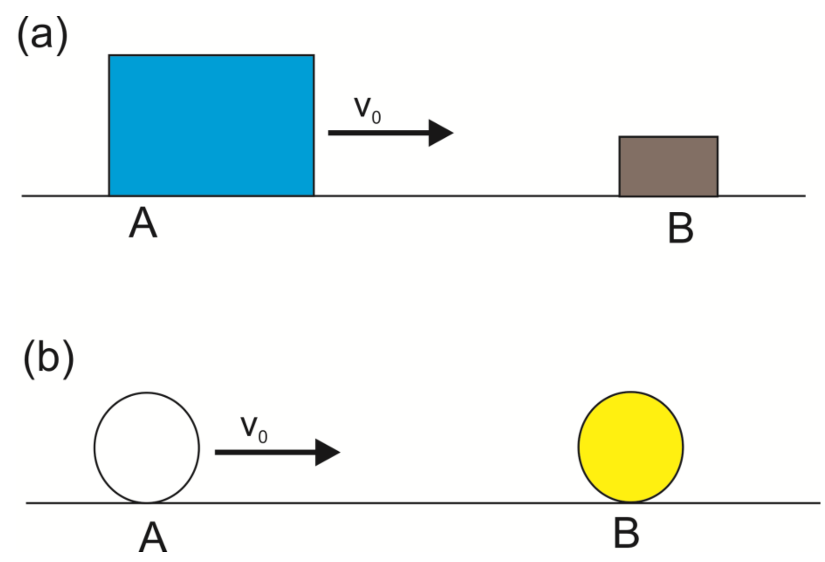


$$v_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0$$

$$v_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_0$$

5.3. Col·lisions

Problema:
Determina la velocitat final dels dos cossos en una col·lisió elàstica



$$a) M >> m$$

$$b) m_A = m_B = m$$

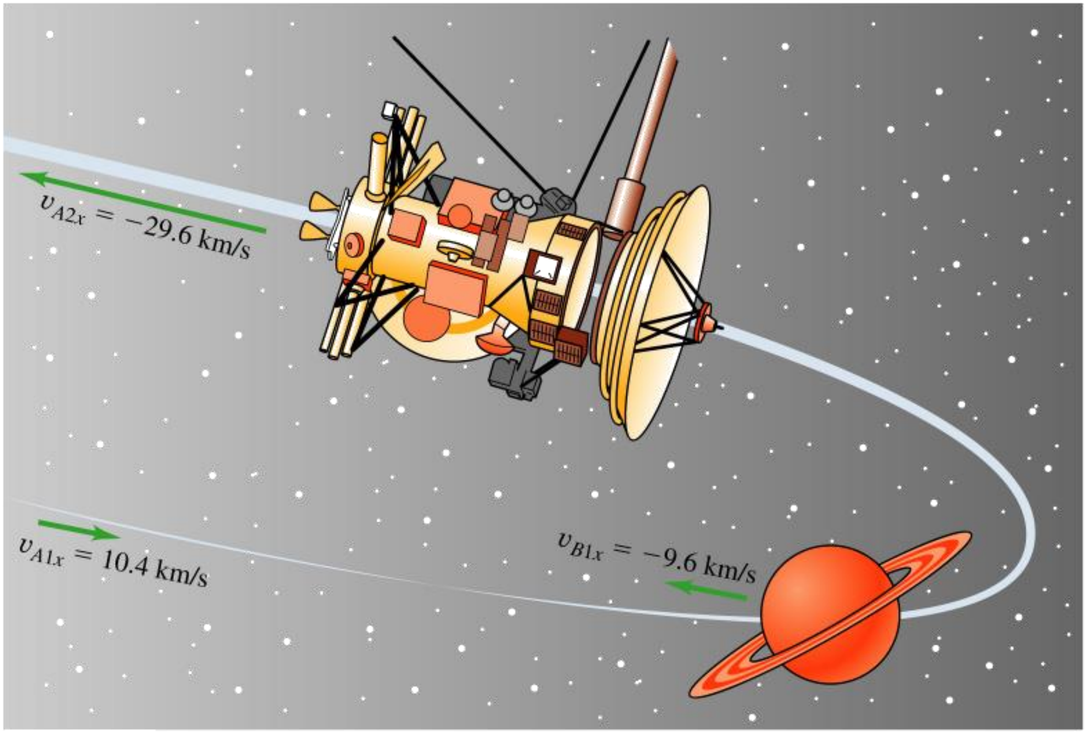
5.3 Col.lisions

Exemple: impuls d'un satèlit

$$v_{A2} - v_{B2} = -e(v_{A1} - v_{B1})$$

$$v_{A2} = v_{B2} - 1(v_{A1} - v_{B1})$$

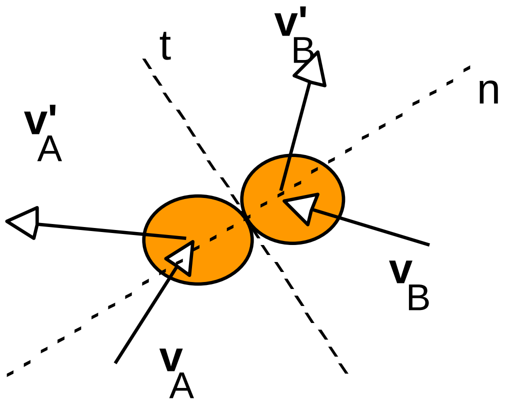
$$v_{A2} = 2v_{B2} - v_{A1}$$



Què passa amb el moment?

5.3. Col.lisions

Col.lisions oblíqües



En la direcció *t*, la velocitat no canvia:

$$(\mathbf{v}'_A)_t = (\mathbf{v}_A)_t, \qquad (\mathbf{v}'_B)_t = (\mathbf{v}_B)_t$$

En la direcció *n*, es conserva la quantitat de moviment:

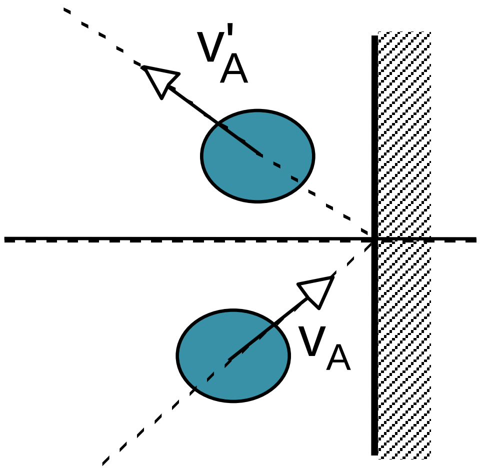
$$m_A(\mathbf{v}_A)_n + m_B(\mathbf{v}_B)_n = m_A(\mathbf{v}'_A)_n + m_B(\mathbf{v}'_B)_n$$

i les velocitats estan relacionades pel coeficient de restitució

$$e = -\frac{(\mathbf{v}'_A)_n - (\mathbf{v}'_B)_n}{(\mathbf{v}_A)_n - (\mathbf{v}_B)_n}$$

5.3. Col.lisions

En una partida de frontó, la pilota xoca amb la paret amb velocitat v_A i angle amb la perpendicular q. Si el coeficient de restitució és e, quines son les velocitat i angle de la pilota després de la col.lisió.

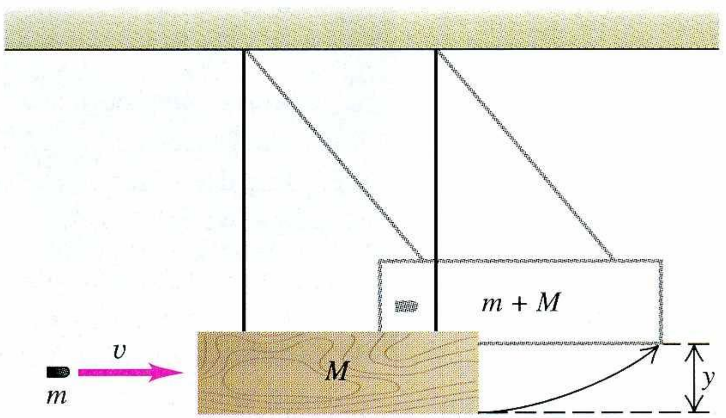


5.3. Col·lisions

En aquest problema considerem l'utilització d'un pèndol balístic, amb el qual podem determinar la velocitat d'una bala. Quan una bala de massa m = 8 g impacta sobre el bloc de massa M = 4.3 kg, aquest s'alça una altura h = 6 cm.

a) ¿Quina és la velocitat de la bala abans de l'impacte?

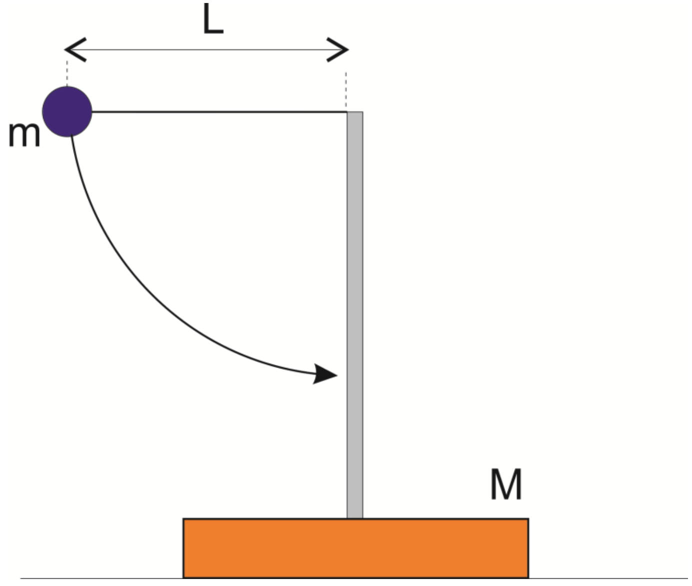
b) Calculeu la fracció de l'energia mecànica del sistema (bala + bloc) que roman després de la col·lisió.



5.3. Col·lisions

La bola colpeja el pal i hi queda adherida. El coeficient de fregament del tauló amb el terra és μ

¿Quina és la velocitat de la bola quan olpeja el pal?
¿Quina distància recorre el tauló en el terra?



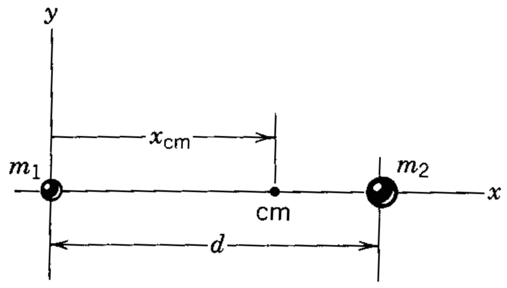
5.4. Centre de masses

La posició del centre de masses del sistema format pels dos cossos ve donada per l'expressió:

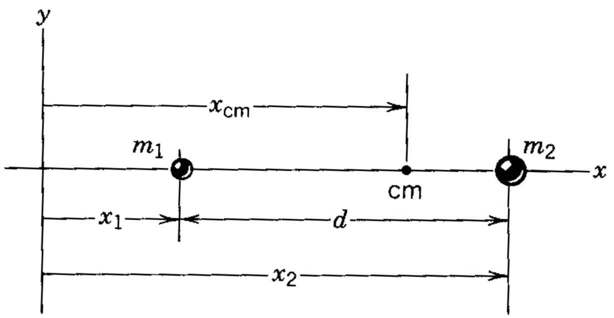
$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{m_A \vec{\mathbf{r}}_A + m_B \vec{\mathbf{r}}_B}{m_A + m_B}$$

En coordenades

$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$



(a)

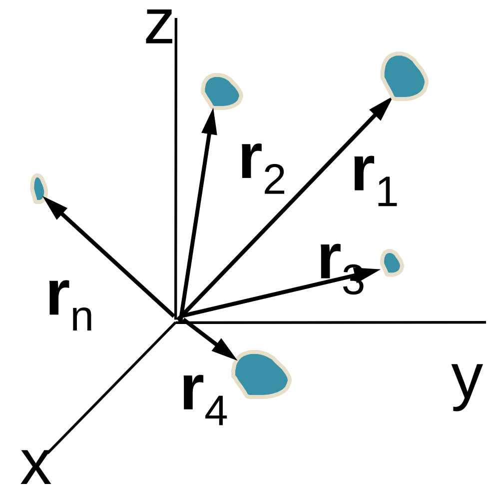


(b)

5.4 Centre de masses

Si el sistema està format per un conjunt de *n* partícules discretes, distribuï-des en un espai tridimensional, el centre de masses es defineix com

$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

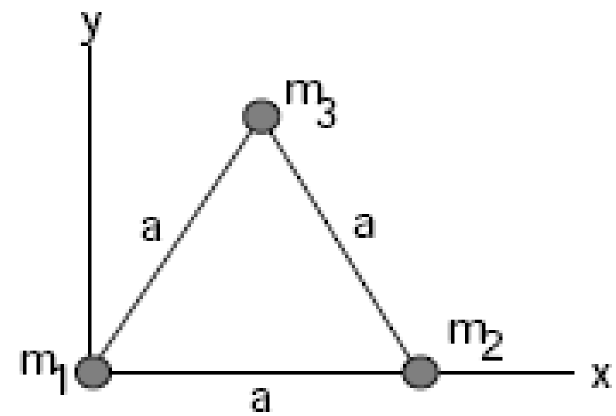


Que en coordenades cartesianes es queda

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

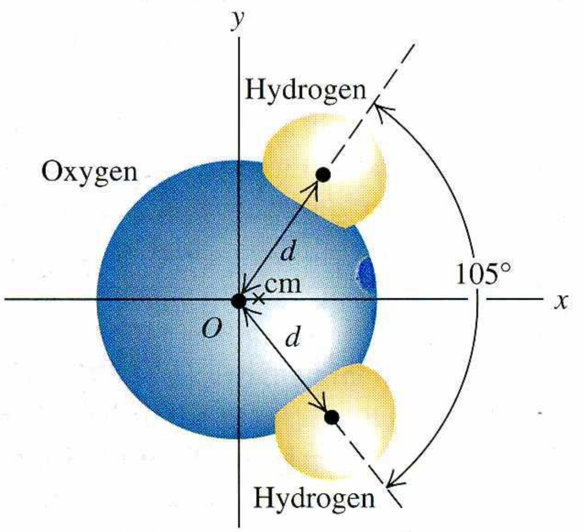
5.4. Centre de masses

Tenim tres partícules de masses m_1 =0.3 kg, m_2 = 0.7 kg i m_3 = 2 kg, situades als vèrtexs d'un triangle equilàter de costat a = 45 cm. ¿On es troba el centre de masses?



5.4. Centre de masses

La figura mostra un model simple de la molècula d'aigua. Es representa cada àtom com un punt ja que quasi tota la massa de cada àtom està concentrada en el seu nucli, què és unes 10^{-5} voltes el tamany total de l'àtom. El valor de d és 0.957×10^{-10} m. Troba la posició del centre de masses.



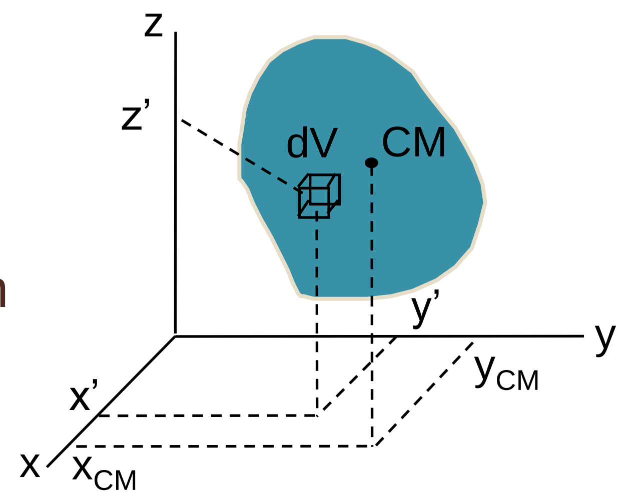
Sol: $x_{cm} = 6.5$ pm

5.4. Centre de masses

Definició

Si el sistema es ara un cos extens, la massa està distribuïda en l’espai i el centre de masses es calcula a partir de l’expressió

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int \vec{\mathbf{r}}'\,dm}{\int dm}$$



Si la massa està distribuïda uniformement en un volum, $\rho = \dfrac{M}{V}$

En general, podem escriure la densitat com

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

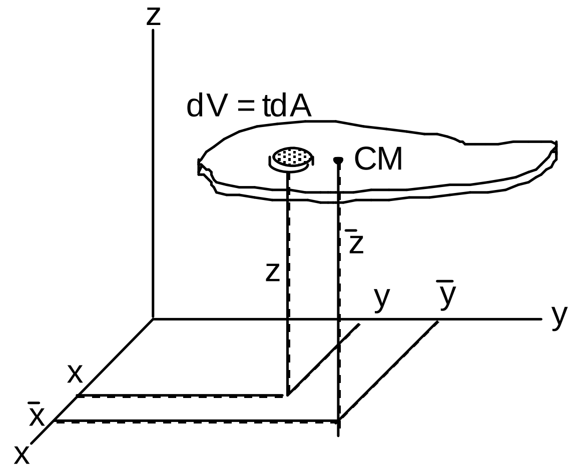
I, aleshores $\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \dfrac{\int \rho\,\vec{\mathbf{r}}'\,dV}{\int \rho\,dV}$ Si ρ =ct, $\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \dfrac{\int \vec{\mathbf{r}}'\,dV}{\int dV}$

Centroid

5.4. Centre de masses

Densitat superficial

Si el sistema es ara un objecte de gruix, t, menyspreable podem definir la **densitat superficial de massa**



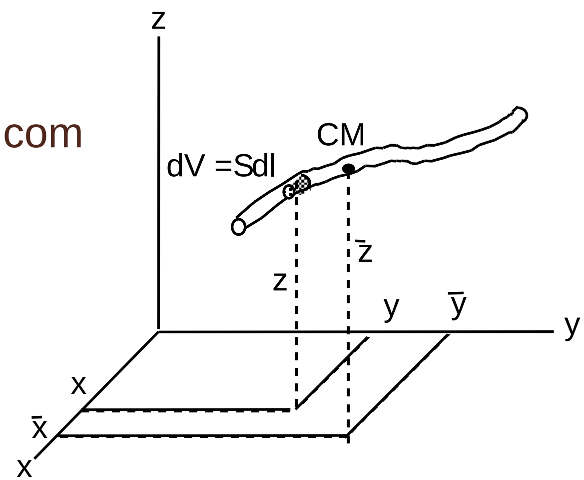
$$\sigma = \frac{dm}{dS}$$ aleshores, $$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int \vec{\mathbf{r}}'\,dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{\mathbf{r}}'\,\sigma\,dS}{\int \sigma\,dS}$$

Si la massa està distribuïda uniformement en la superfície,

$$\sigma = \frac{M}{S}$$ i, aleshores $$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int \vec{\mathbf{r}}'\,dS}{\int dS}$$

Densitat lineal

Si el sistema es ara un objecte unidimensional, com un fil d'aram, podem definir la **densitat longitudinal de massa** com



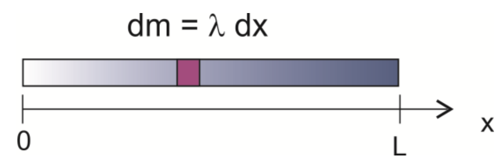
$$\lambda = \frac{dm}{dl}$$ aleshores, $$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int \lambda\,\vec{\mathbf{r}}'\,dl}{\int \lambda\,dl}$$

Si λ=ct, $$\lambda = \frac{M}{L}$$ i $$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int \vec{\mathbf{r}}'\,dl}{\int dl}$$

5.4. Centre de masses

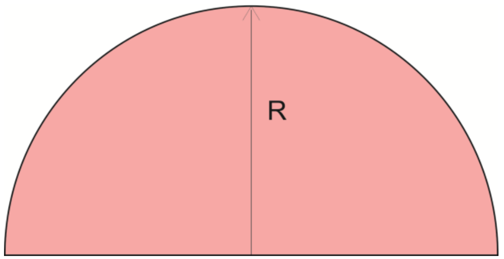
Determineu la massa total, i la posició del CM, d'una barreta de longitud L de densitat lineal variable.

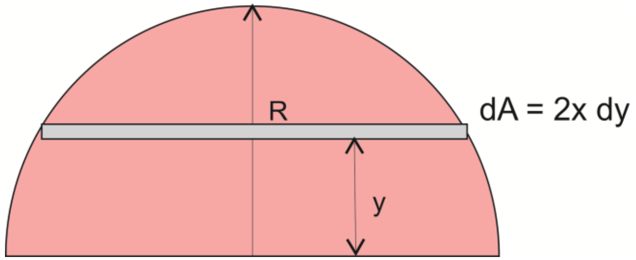
$$\lambda = \gamma x$$



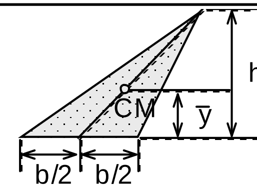
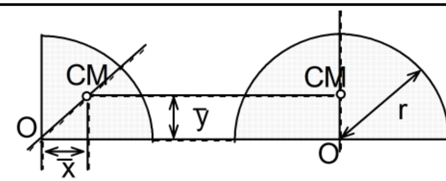
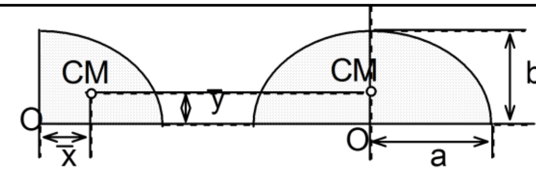
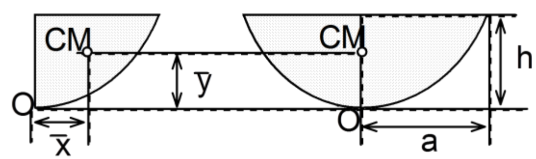
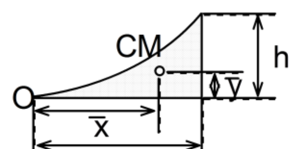
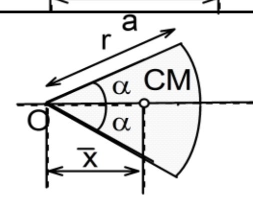
5.4. Centre de masses

Determineu la superfície total A, i la posició del CM, d'una placa homogènia semicircular com es mostra en la figura.





5.4. Centre de masses

Forma		x_{cm}	y_{cm}	Àrea
Àrea triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un quart d'àrea circular Àrea semicircular		$\frac{4r}{3\pi}$ 0	$\frac{4r}{3\pi}$ $\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$ $\frac{\pi r^2}{2}$
Quart d'àrea el·líptica Àrea semiel·líptica		$\frac{4a}{3\pi}$ 0	$\frac{4b}{3\pi}$ $\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$ $\frac{\pi ab}{2}$
Àrea semiparabòl·lica Àrea parabòl·lica		$\frac{3a}{8}$ 0	$\frac{3h}{5}$ $\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$ $\frac{4ah}{3}$
Extradós parabòl·lic		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

5.4. Centre de masses

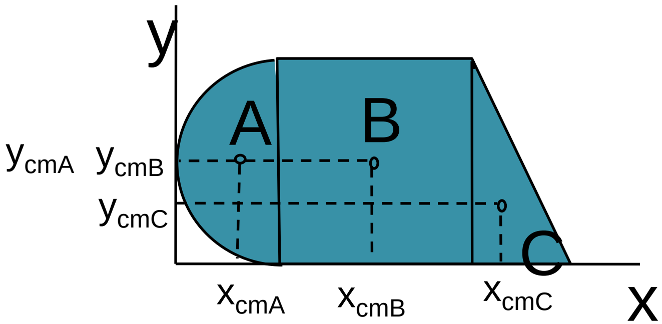
Elements compostos

Si tenim un objecte que podem separar en elements dels que coneixem la posició del centre de masses, puc calcular la posició del centre de masses del conjunt d'una manera molt senzilla:

$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{m_A\vec{\mathbf{r}}_A + m_B\vec{\mathbf{r}}_B + m_C\vec{\mathbf{r}}_C}{m_A + m_B + m_C}$$

$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C}$$

$$y_{cm} = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C}{m_A + m_B + m_C}$$



5.4. Centre de masses

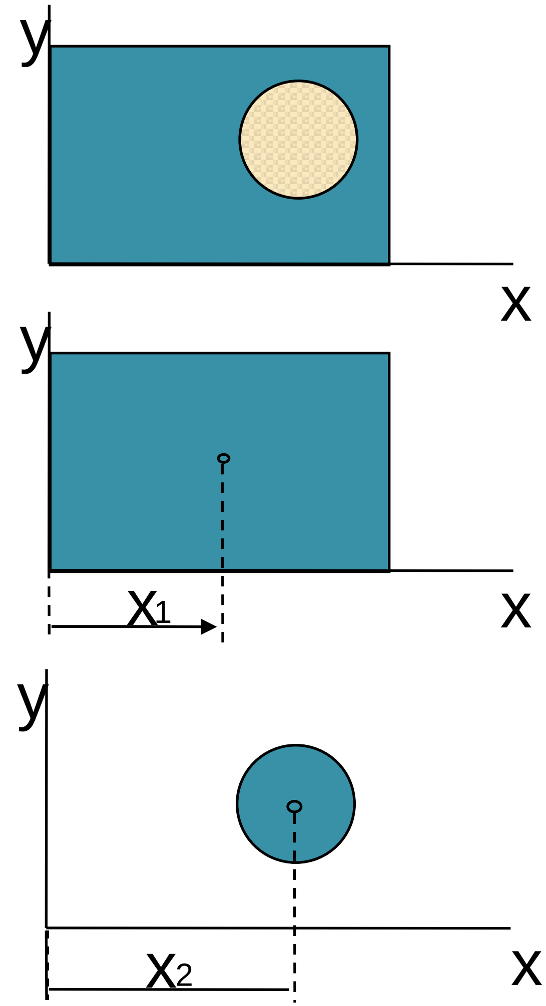
Forats

Quan tenim forats cal tractar aquest com una massa negativa:

$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 - m_2\vec{\mathbf{r}}_2}{m_1 - m_2}$$

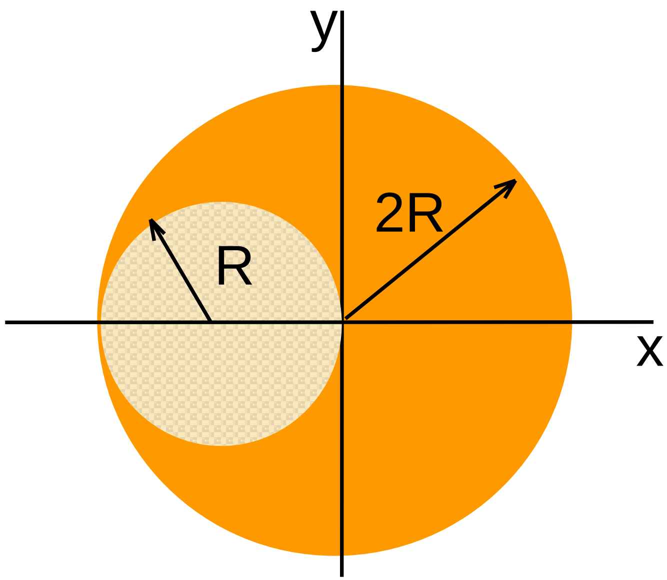
$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 - m_2}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 - m_2 y_2}{m_1 - m_2}$$



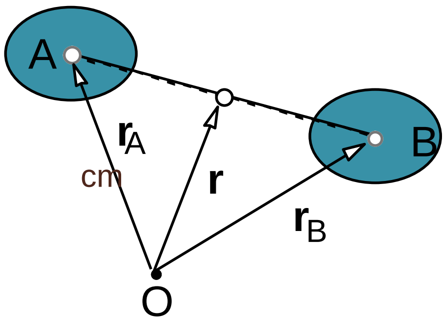
5.4. Centre de masses

Una placa circular de radi 2R té un forat circular, tangent a la vora, de radi R. Hem de calcular la posició del centre de masses



5.5. Moviment del centre de masses

La posició del centre de masses del sistema format pels dos cossos ve donada per l'expressió:



$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{m_A \vec{\mathbf{r}}_A + m_B \vec{\mathbf{r}}_B}{m_A + m_B}$$

Si derive aquesta expressió respecte del temps obtinc:

$$\vec{\mathbf{v}}_{cm} = \frac{m_A \vec{\mathbf{v}}_A + m_B \vec{\mathbf{v}}_B}{m_A + m_B} \Rightarrow \underbrace{(m_A + m_B)\vec{\mathbf{v}}_{cm}}_{\vec{\mathbf{p}}_{cm}} = \underbrace{m_A \vec{\mathbf{v}}_A}_{\vec{\mathbf{p}}_A} + \underbrace{m_B \vec{\mathbf{v}}_B}_{\vec{\mathbf{p}}_B}$$

En general, per a un sistema de moltes partícules tindrem que el moment del centre de masses és igual a la suma dels moments de les partícules:

$$\boxed{\vec{\mathbf{p}}_{cm} = \sum \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{i}}}$$

5.5. Moviment del centre de masses

Quan dos cossos *A* i *B* interaccionen (per exemple, per mitjà d'una col·lisió) en absència de forces externes, la velocitat del centre de masses del sistema format pels dos cossos és constant.

$$M\,\vec{\mathbf{v}}_{cm} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 + m_3\vec{\mathbf{v}}_3 ...$$

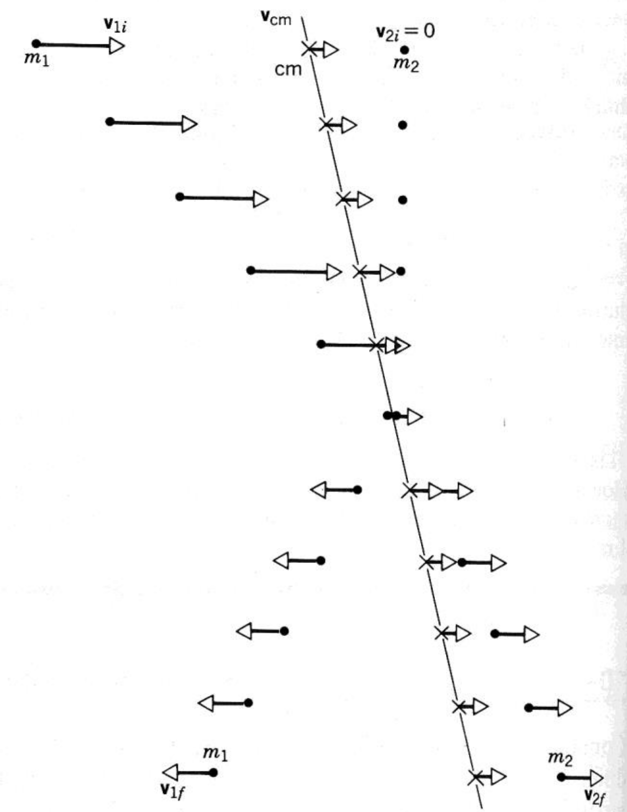
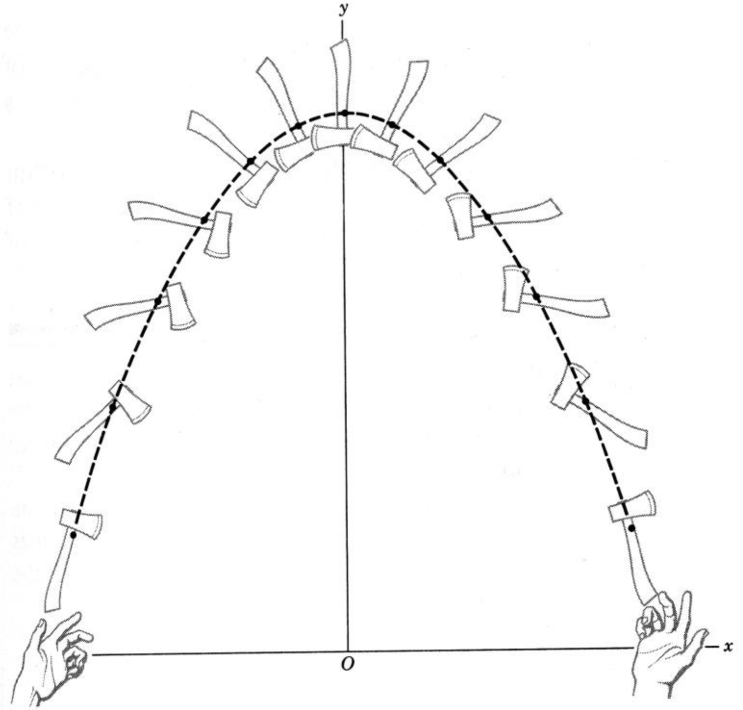


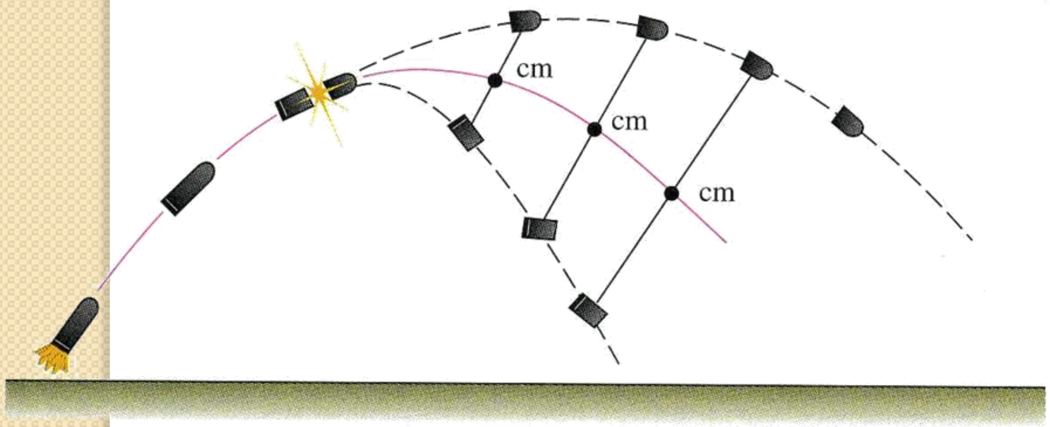
Figure 9 Some "snapshots" of two particles undergoing an elastic collision. We assume that particle 2 is initially at rest and that $m_2 = 3m_1$. The velocity of the center of mass is also shown. Note that it is unaffected by the collision.

5.5. Moviment del centre de masses

El centre de masses d'un sistema de partícules, es mou baix influència només de les forces externes

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = M\,\vec{\mathbf{a}}_{cm}$$





5.5. Moviment del centre de masses

Una força constant de 12 N arrossega tres blocs units per cordes, de massa 3 kg cadascun d'ells, que llisquen sense fregament per una superfície horitzontal. El blocs parteixen del repòs a l'instant t = 0 s, i a t = 6 s es trenca la corda que uneix el primer bloc amb el segon, mentre continua l'acció de la força de 12 N sobre el primer bloc. S'ha de trobar l'acceleració del centre de masses del sistema format pels tres blocs, abans i després de la trencada