Tema 2.
Cinemàtica del punt

2.1. Posició, velocitat i acceleració.
2.2. Moviment en una línia recta.
2.3. Moviment en un pla.
2.4. Acceleració tangencial i normal.
2.5. Moviment circular.
2.6. Coordenades polars.
2.7. Moviment relatiu.

UNIVERSITAT JAUME·I

2.1. Posició, velocitat i acceleració

En un espai 1-D, definim la velocitat mitjana com

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Si fem que $\Delta t \rightarrow 0$, podem definir la velocitat en un disntant determinat com

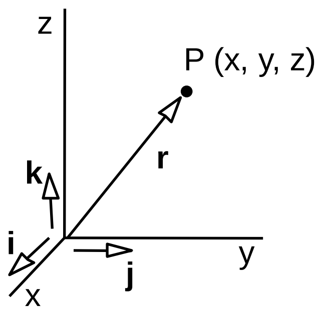
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

De la mateixa manera, podem definir l'acceració d'un punt en un instant donat com

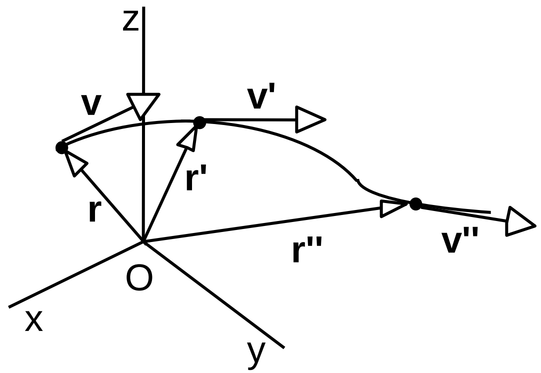
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

2.1. Posició, velocitat i acceleració

En un espai 3-D tenim el vector de posició:



$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$



la velocitat instantània la podem calcular com

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

i, l'acceleració queda:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

2.1. Posició, velocitat i acceleració

En coordenades cartesianes $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

La velocitat es pot descompondre en els seus components

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\vec{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\vec{j} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

I el mateix passa amb l'acceleració

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

2.2. Moviment en una línia recta

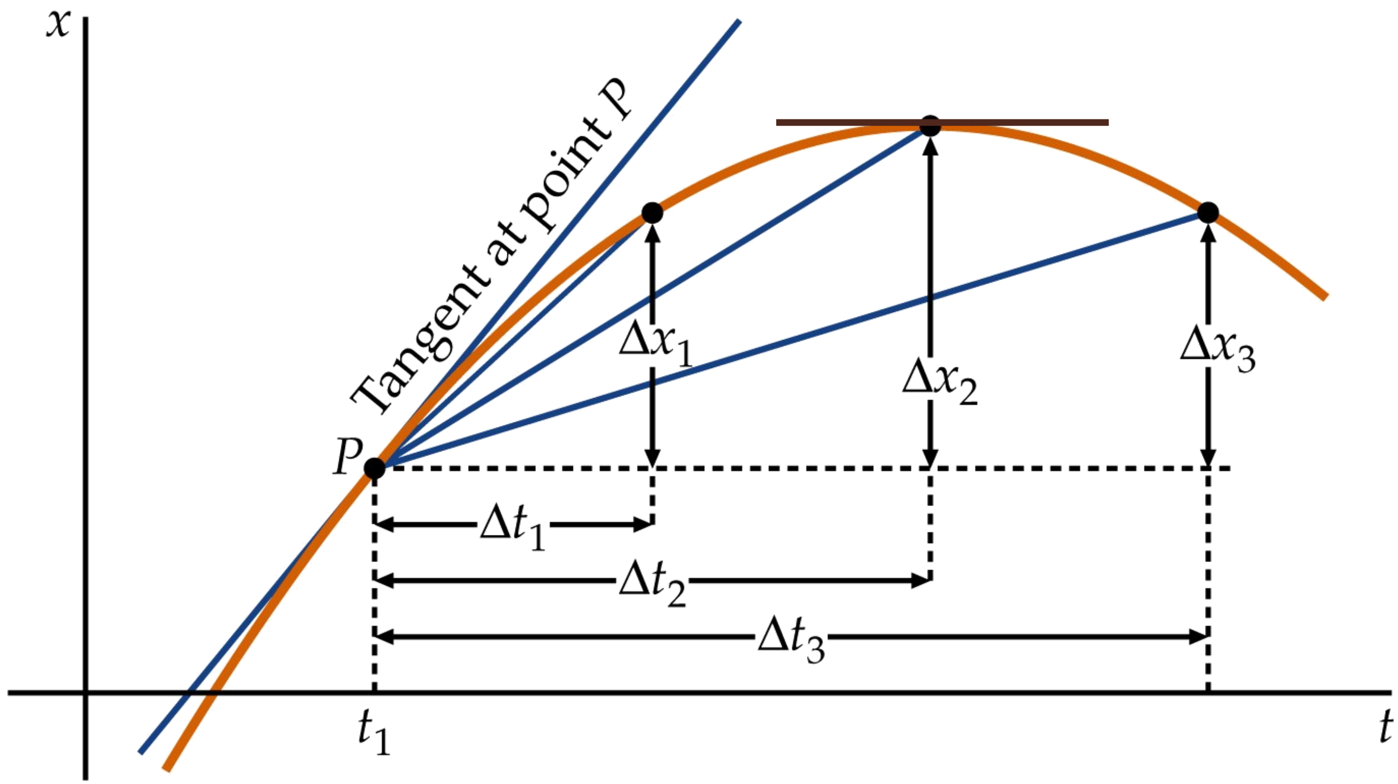
x

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \int v\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}x \quad \rightarrow \Delta x = x - x_0 = \int v\mathrm{d}t$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \int a\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}v \quad \rightarrow \Delta v = v - v_0 = \int a\mathrm{d}t$$

2.2. Moviment en una línia recta

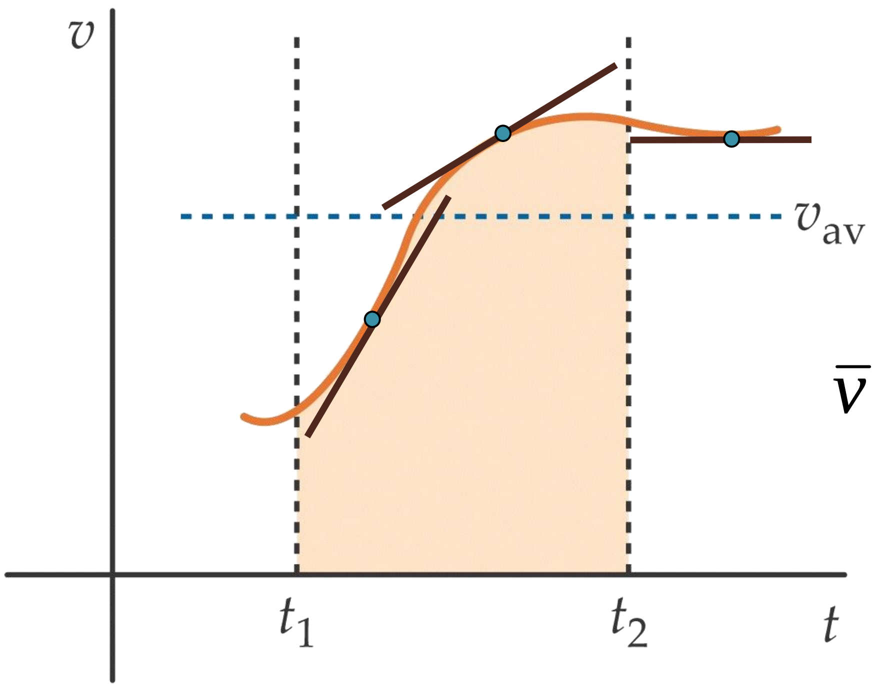
$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad\qquad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$



2.2. Moviment en una línia recta

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\Delta x = \int v\mathrm{d}t$$



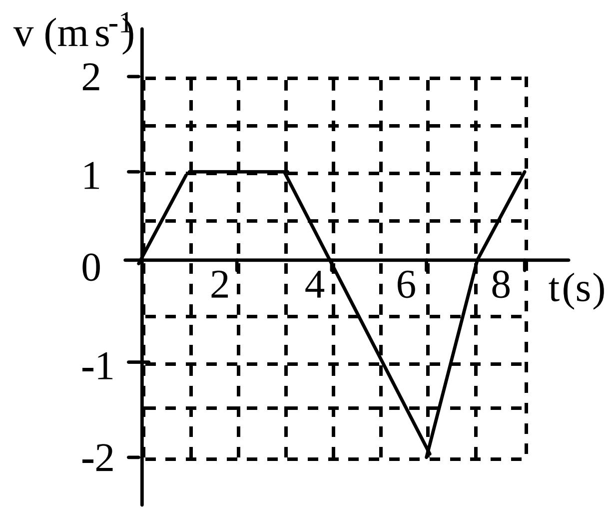
$$\bar{v} = v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int v\mathrm{d}t$$

2.2. Moviment en una línia recta

Problema

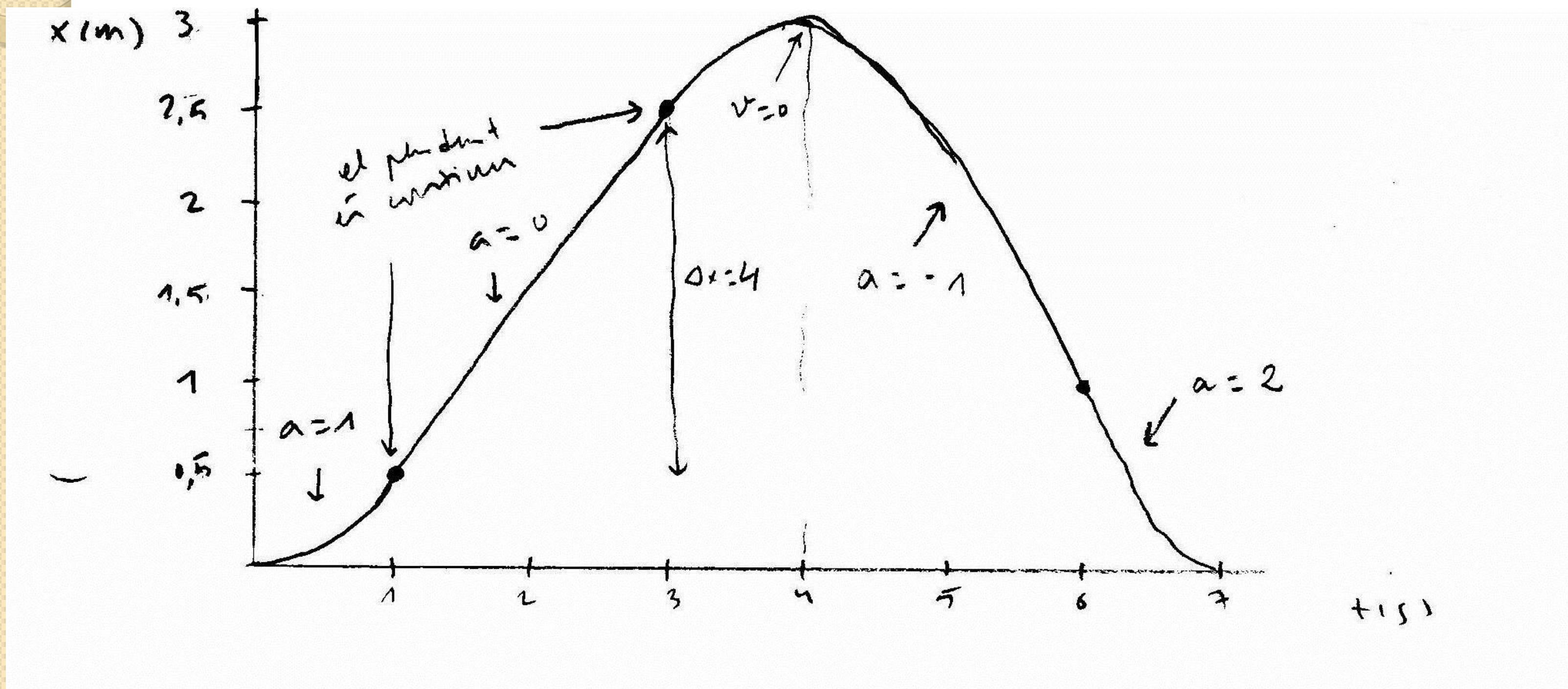
Un objecte es mou al llarg d'una línia recta. En l'instant inicial, l'objecte es troba en l'origen de coordenades, i després es posa en repòs; la seua velocitat en cada instant és la que es mostra en el gràfic. Hem de trobar

(a) L'acceleració en funció del temps,
(b) La posició en funció del temps,
(c) La distància total que ha recorregut.



2.2. Moviment en una línia recta

Problema



Acceleració depenent de la posició:

Càlcul de la velocitat en funció de la posició.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = a(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(x)$$

Regla de la cadena

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} v = a(x)$$

$$\int v \mathrm{d}v = \int a(x) \mathrm{d}x$$

2.2. Moviment en una línia recta

Acceleració depenent de la posició:

Exemple

$$a(x) = -bx \quad \rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bx$$

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -bx$$

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -b\int_{x_0}^{x} x\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}v^2\bigg|_{v_0}^{v} = \frac{-b}{2}x^2\bigg|_{x_0}^{x}$$

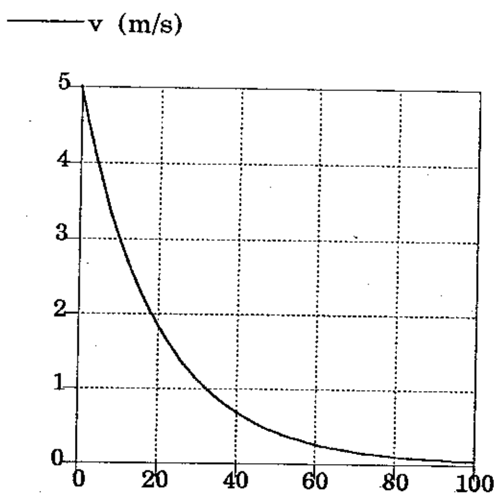
$$\boxed{v = \left[v_0^2 - b\left(x^2 - x_0^2\right)\right]^{1/2}}$$

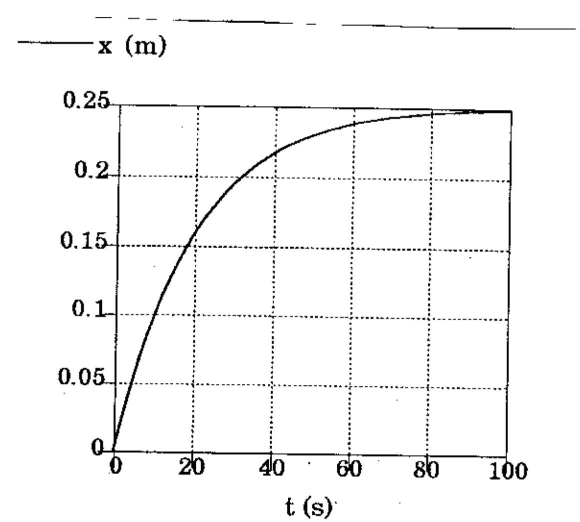
2.2. Moviment en una línia recta

Problema

Una partícula que es troba inicialment en l'origen de coordenades amb velocitat *v*0, és frenada amb una força proporcional a la seua velocitat, de manera que , on *k* és una constant. Hem de trobar:

(a) la velocitat en funció del temps,
(b) la posició en funció del temps,
(c) la velocitat en funció de la posició.
(d) la distància total, *d*, que recorrerà la partícula.
(e) Sobre una recta horitzontal que constitueix la línia del moviment, representem amb vectors la velocitat i l'acceleració per al punt inicial, x = 0, per al punt final *d*, i per a dos punts intermedis.

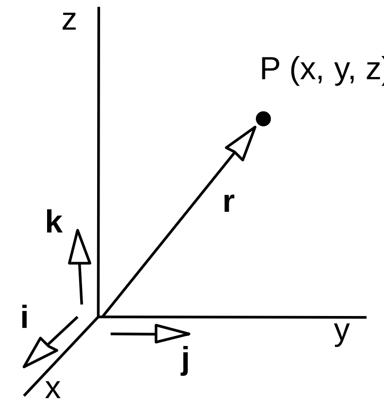




2.3. Moviment en un pla

Recordem que el vector posició en **coordenades cartesianes** és:

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



La velocitat:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} =$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

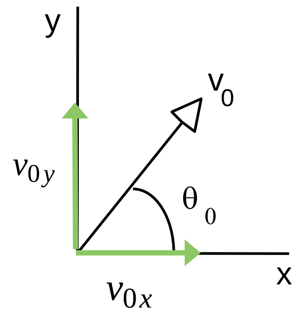
I l'acceleració

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

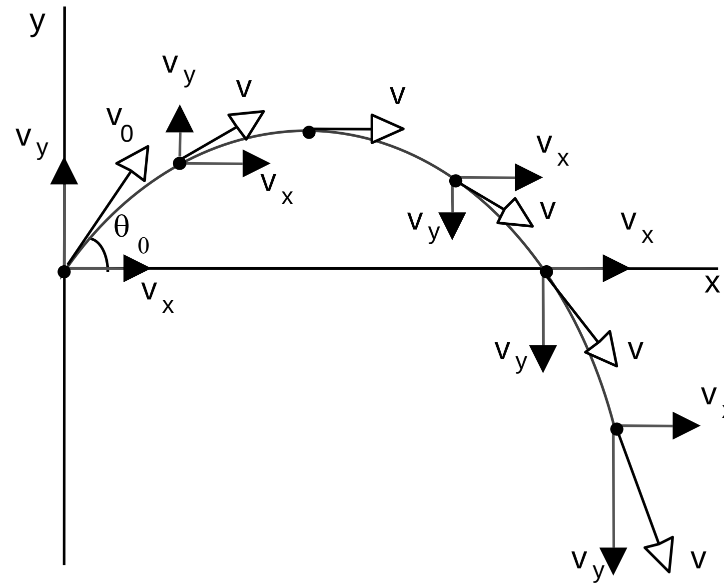
$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

2.3. Moviment en un pla

Moviment de projectils



$$\vec{a} = -g\,\vec{j}$$



$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{v}(t) \rightarrow -g\,\vec{j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}v_x\vec{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}v_y\vec{j}$$

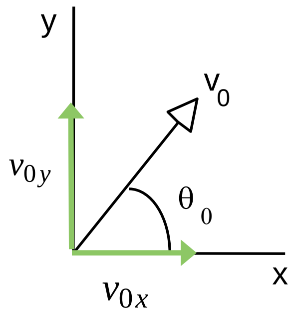
$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}v_x \rightarrow v_x = ct; v_x = v_{x0}$$

$$-g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}v_y \rightarrow d\,v_y = -gdt \rightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y} d\,v_y = -\int_{t_0}^{t} gdt = -g\int_{t_0}^{t} dt$$

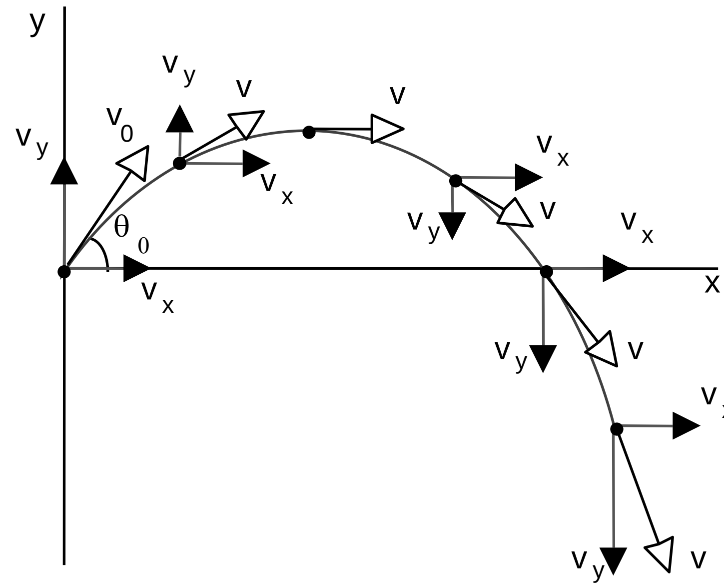
$$\rightarrow v_y - v_{0y} = -g(t - t_0)$$

2.3. Moviment en un pla

Moviment de projectils



$$\vec{a} = -g\,\vec{j}$$

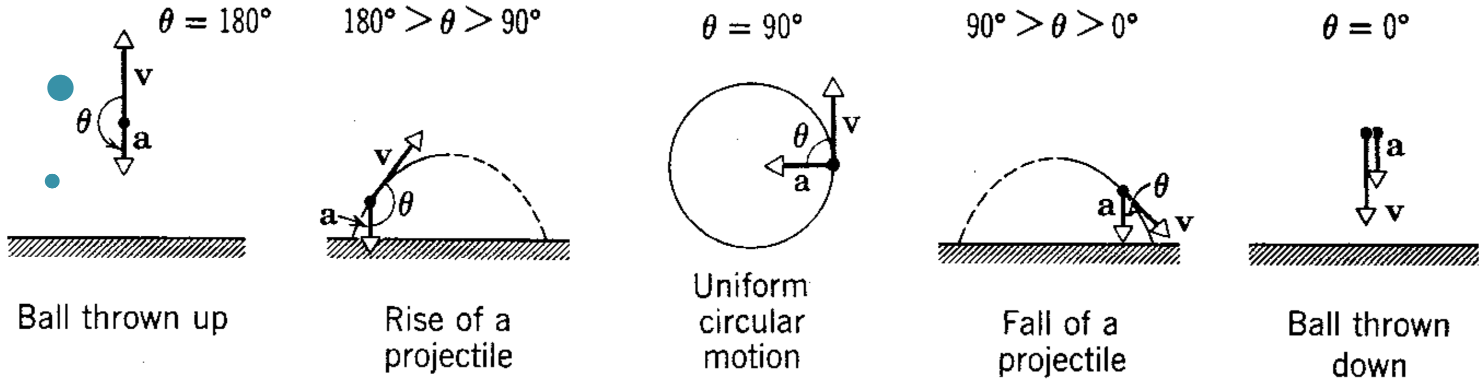


$$v_y = v_{0y} - g(t - t_0)$$

$$v_x = v_{x0}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{r}(t) \quad \begin{cases} v_{0x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x \rightarrow dx = v_{0x}dt \\ v_{0y} - g(t - t_0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}y \rightarrow dy = [v_{0y} - g(t - t_0)]dt \end{cases}$$

2.3. Moviment en un pla



Velocitat i acceleració

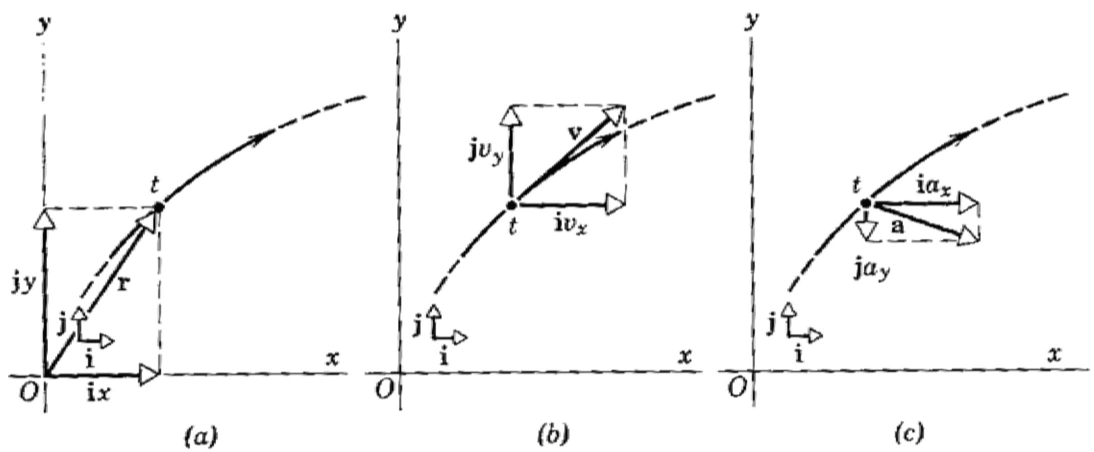


figure 3-3
A particle at time t has (*a*) a position described by **r**, (*b*) an instantaneous velocity **v**, and (*c*) an instantaneous acceleration **a**. The vector components **i**x and **j**y of Eq. 3-4, **i**v_x and **j**v_y of Eq. 3-5, and **i**a_x and **j**a_y of Eq. 3-10 are also shown, as are the unit vectors **i** and **j**.

2.4. Acceleració tangencial i normal

Components intrínseques de l'acceleració

El vector acceleració **a** es pot expressar en components tangencial i normal a la direcció instantània de la trajectòria. És a dir,

$$\vec{\mathbf{a}} = a_t \vec{\mathbf{e}}_t + a_n \vec{\mathbf{e}}_n$$

La component tangencial de l'acceleració correspon a la derivada del mòdul de la velocitat

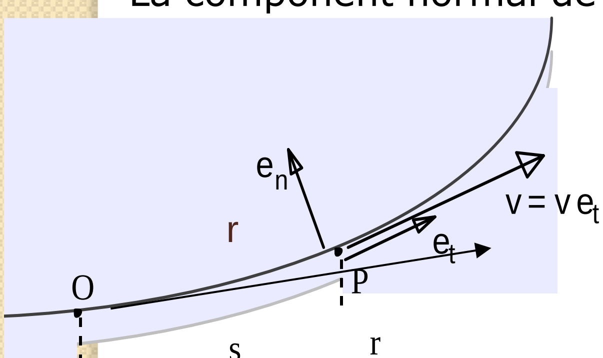
$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

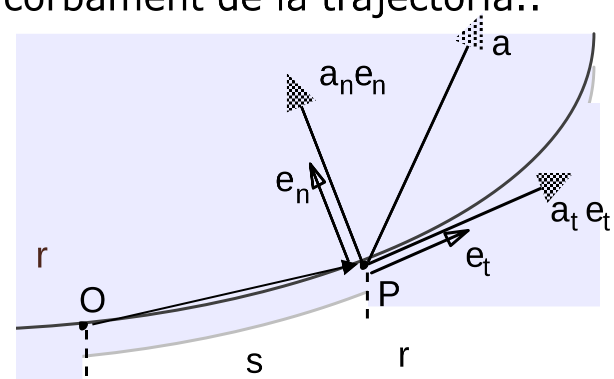
per tant, aquesta component de l'acceleració determina la variació de la magnitud de la velocitat.

La component normal de l'acceleració és

$$a_n = v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{\rho}$$

La component normal de l'acceleració determina el corbament de la trajectòria..





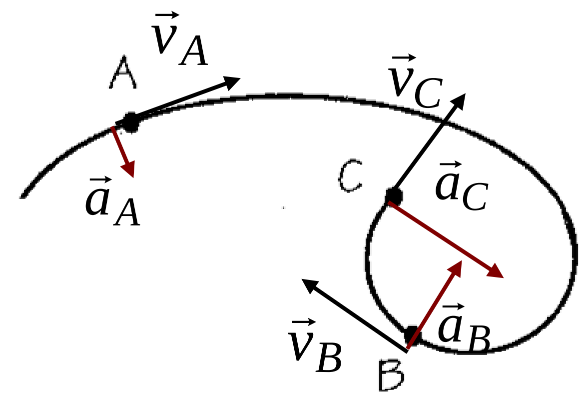
2.4. Acceleració tangencial i normal

Problema

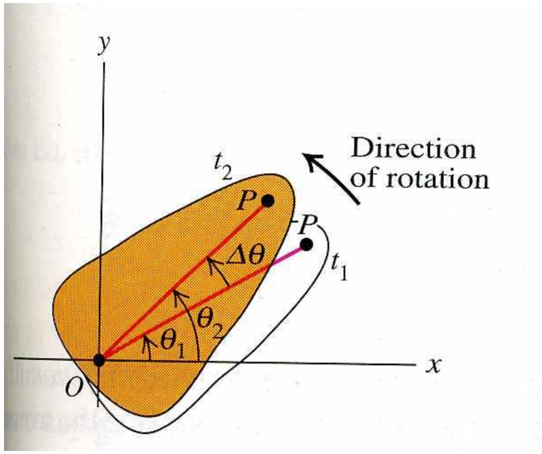
Un cotxe viatja a velocitat *constant* al llarg d'una pista amb forma d'espiral, com s'indica a la figura. Passa primer pel punt *A*, després pel punt *B*, i finalment pel punt *C* que és l'entrada a un edifici d'aparcaments.

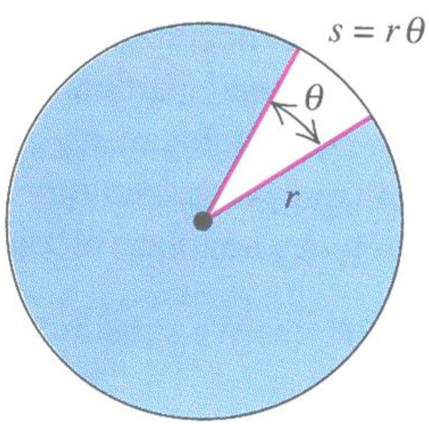
a) La magnitud de l'acceleració del cotxe en el punt *B*, ¿és major, o menor, o igual que la que tenia en el punt *A*?

b) Si les acceleracions no són nul·les, indiqueu les seues direccions i magnituds dibuixant els corresponents vectors en els punts indicats.



2.5. Moviment circular

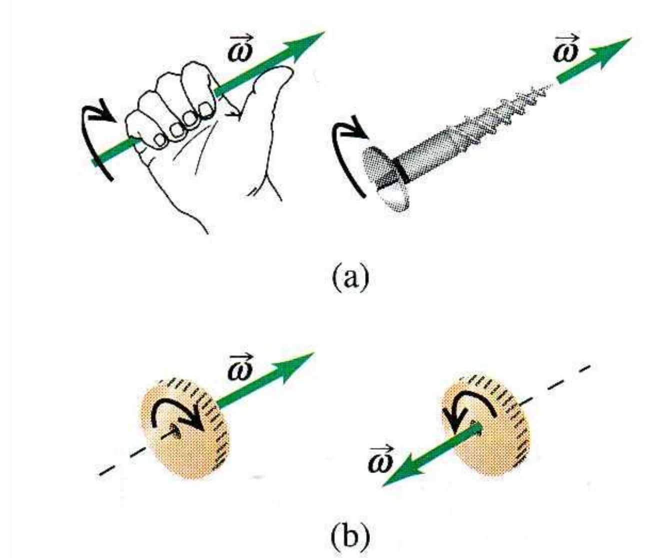


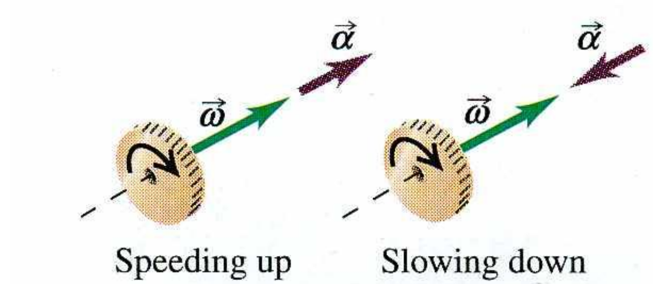


$$s = r\theta$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$





2.5. Moviment circular

Problema

La posició angular del volant d'un motor ve donada per l'expressió

$$\theta = 2.0t^3 \text{ rad}$$

El diàmetre del volant és 0.36 m. Trobeu:

a) L'angle, en radians i en graus, als temps $t_1 = 2$s i $t_2 = 5$s.

b) La distància que una partícula situada en la vorera recorre entre aquests dos temps

c) La velocitat angular mitjana, en rad/s i en revolucions per minut (rpm), entre $t_1 = 2$s i $t_2 = 5$s.

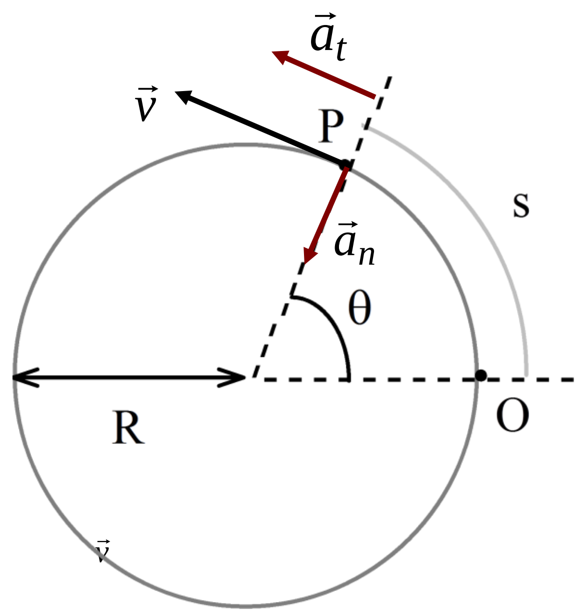
d) La velocitat angular instantània en $t = 3$s.

e) L'acceleració angular mitjana entre $t_1 = 2$s i $t_2 = 5$s.

f) L'acceleració angular instantània en $t = 3$s.

2.5. Moviment circular

Variables importants en el moviment circular: $\begin{cases} \theta \\ \omega = \dfrac{d\theta}{dt} \\ \alpha = \dfrac{d\omega}{dt} \end{cases}$ Mov. linial: $\begin{cases} x \\ v = \dfrac{dx}{dt} \\ a = \dfrac{dv}{dt} \end{cases}$



$$s = R\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

Sols si α és constant s'acomplirà $\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$

2.4. Moviment circular

Acceleració angular constant

COMPARISON OF LINEAR AND ANGULAR MOTION WITH CONSTANT ACCELERATION

STRAIGHT-LINE MOTION WITH CONSTANT LINEAR ACCELERATION	FIXED-AXIS ROTATION WITH CONSTANT ANGULAR ACCELERATION
$a = \text{constant}$	$\alpha = \text{constant}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt} \qquad \alpha = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$

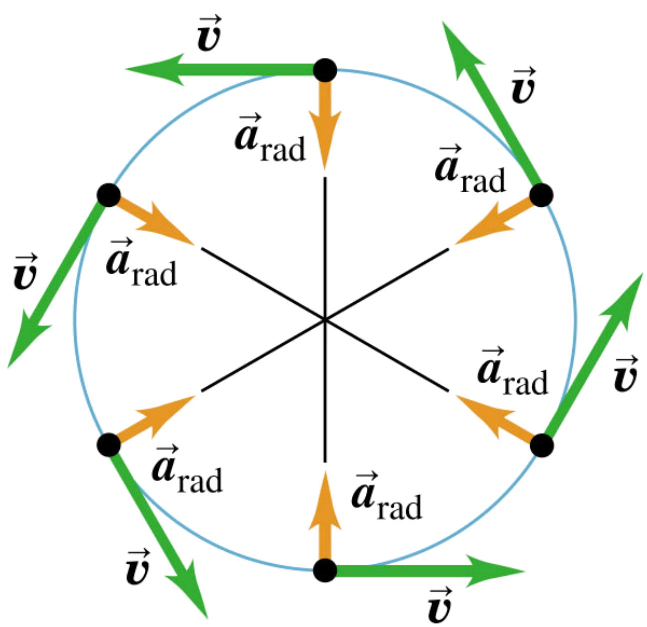
2.5. Moviment circular

- Cuando una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio R con rapidez constante v, tiene una aceleración de magnitud

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R}. \qquad (3\text{–}28)$$

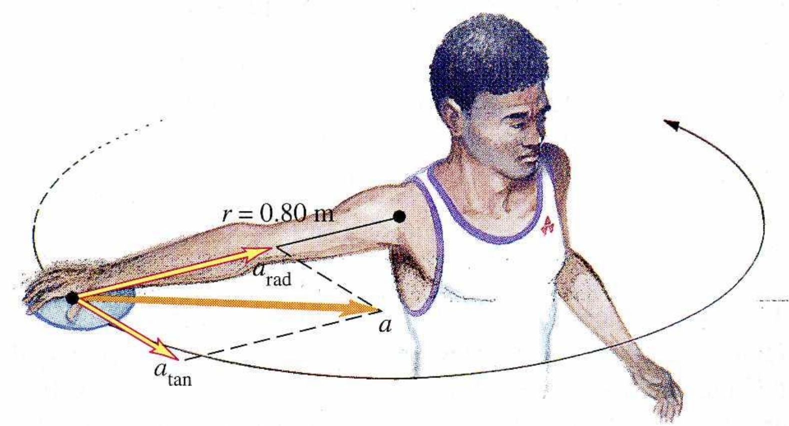
La aceleración siempre va dirigida hacia el centro del círculo y es perpendicular a $\vec{v}$. El periodo T de un movimiento circular es lo que tarda una revolución. Si la rapidez es constante, $v = 2\pi R / T$

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \qquad (3\text{–}30)$$



2.5. Moviment circular

Un llançador de disc gira amb acceleració angular $\alpha = 50$ rad/s^2, movent el disc en un cercle de radi $r = 0.8$ m. Si modelem el braç del llançador com un cos rígid tal que r és constant, calculeu la magnitud i les components tangencial i centrípeta de l'acceleració del disc en l'instant en què la velocitat angular és 10 rad/s.



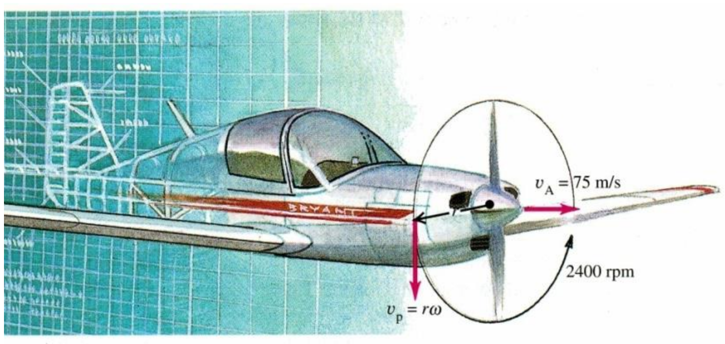
2.5. Moviment circular

Problema

Heu de dissenyar l'hèlix d'un avió per a girar a 2400 rpm de manera que la velocitat de l'avió respecte de l'aire siga de 75 m/s i les puntes de les pales de l'hèlix no superen els 270 m/s (= 0.8 v_{so}, ja que si es moveren a la velocitat del so produirien molt de soroll)

a) ¿Quin és el màxim radi que pot tenir l'hèlix?

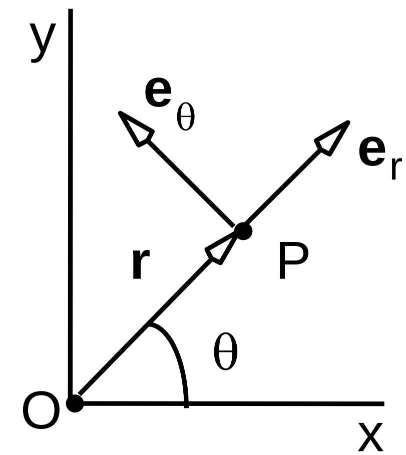
b) Amb eixe radi, ¿quina és l'acceleració de la punta de l'aspa?



Sol.: a) R = 1.03 m; b) $a_n = 6.5\ 10^4$ m/s^2

2.6. Coordenades polars

Coordenades polars



Partim del vector posició $\vec{\mathbf{r}} = r\vec{\mathbf{e}}_r$

Derivem per a calcular la velocitat $\vec{\mathbf{v}} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{\mathbf{e}}_r + r\dfrac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}$

Com sabem que $\dfrac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{e}}_\theta$, la velocitat queda

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}} = \frac{dr}{dt}\vec{\mathbf{e}}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{e}}_\theta}$$

Per calcular l'acceleració derive l'expressió de la velocitat

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{\mathbf{e}}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{e}}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{\mathbf{e}}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{dt}$$

Es pot demostrar que $\dfrac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{e}}_r$ i aleshores l'acceleració queda

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{\mathbf{e}}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{\mathbf{e}}_\theta}$$

2.6. Coordenades polars

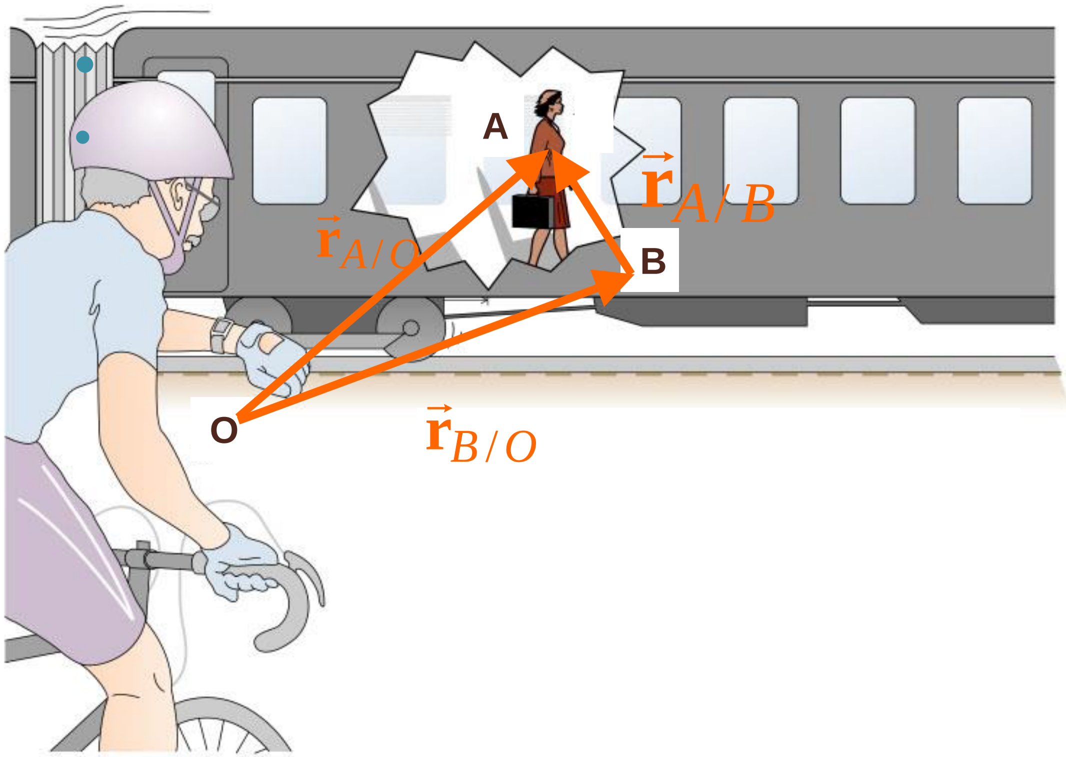
Problema

Un punt material M descriu la corba d'equació, en coordenades polars planes,

$$r = b\theta$$

amb una velocitat angular $\mathrm{d}\theta / \mathrm{d}t$ constant de valor ω_0. Calculeu, en la base de les coordenades polars planes, les components de la velocitat i de l'acceleració. Doneu també els respectius mòduls.

2.7. Moviment relatiu



(a)

La relació entre els vectors posició és

$$\vec{\mathbf{r}}_{A/O} = \vec{\mathbf{r}}_{B/O} + \vec{\mathbf{r}}_{A/B}$$

Derivant obtenim

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_{A/O}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_{B/O}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_{A/B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{A/O} = \vec{\mathbf{v}}_{B/O} + \vec{\mathbf{v}}_{A/B}$$

I si torne a derivar

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_{A/O}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_{B/O}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_{A/B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_{A/O} = \vec{\mathbf{a}}_{B/O} + \vec{\mathbf{a}}_{A/B}$$

Nota: Aquestes expressions son vàlides només si els vectors estan referits a un sistema de referència que no gira.

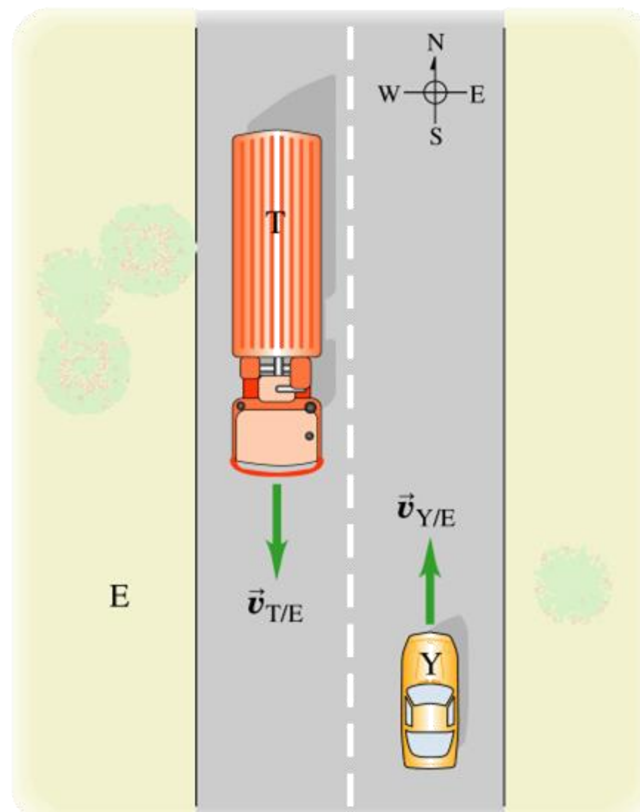
2.7. Moviment relatiu

Problema:

Conduïm al nord a 88 km/h. Un camió s'acosta a 104 km/h. Calculeu

(a) Velocitat del camió respecte de l cotxe

(b) Velocitat del cotxe respecte del camió.



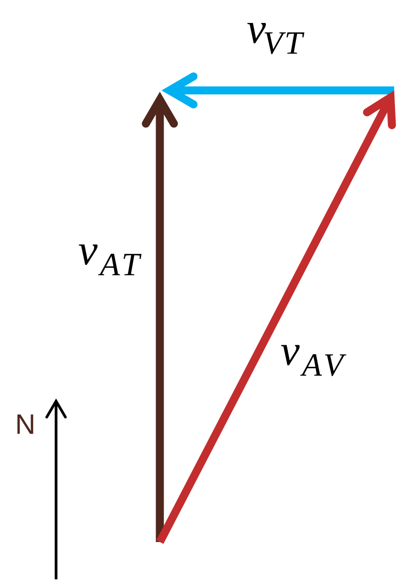
2.7. Moviment relatiu

Problema

Un pilot d'avió desitja volar en direcció Nord. Bufa un vent cap a l'Oest a 110 km/h. Si l'indicador de velocitat de l'avió assenyala que es mou respecte de l'aire a 370 km/h,

(a) ¿A quina direcció haurà de dirigir la proa el pilot?

(b) ¿Quina és la velocitat de l'avió respecte de la Terra?



Apèndix: Significació de la derivada

La derivada com a tangent

S'ha explicat en el Tema dos. Esta interpretació permet relacionar la velocitat amb la posició

$$v = \frac{dx}{dt}$$

La força amb el potencial

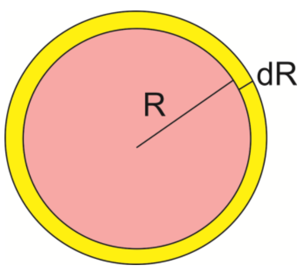
$$F = -\frac{dU}{dx}$$

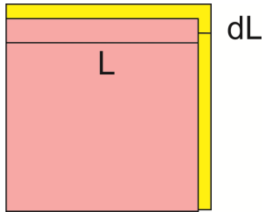
I semblantment moltes altres quantitats físiques

Apèndix: Significació de la derivada

El diferencial

$$dA = \left(\frac{dA}{dR}\right) dR$$





$$A = \pi R^2$$

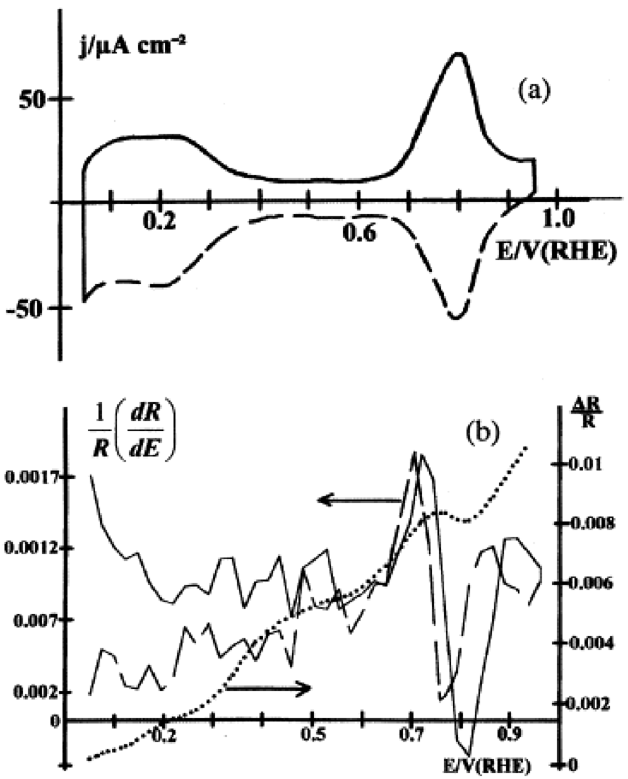
$$dA = (2\pi R)\, dR$$

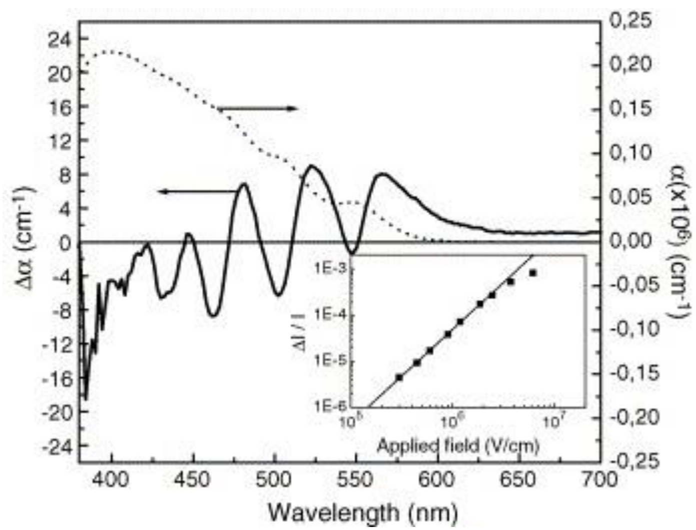
$$A = L^2$$

$$dA = (2L)\, dL$$

Apèndix: Significació de la derivada

Third-derivative modulation spectroscopy with low-field electroreflectance
Surface Science Volume 37, June 1973, Pages 418–442
D.E. Aspnes Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974, USA





Apèndix: Significació de la derivada

Geodesic active contours

Vicent Caselles, Ron Kimmel, Guillermo Sapiro, International Journal of Computer Vision, February 1997, Volume 22, pp 61-79

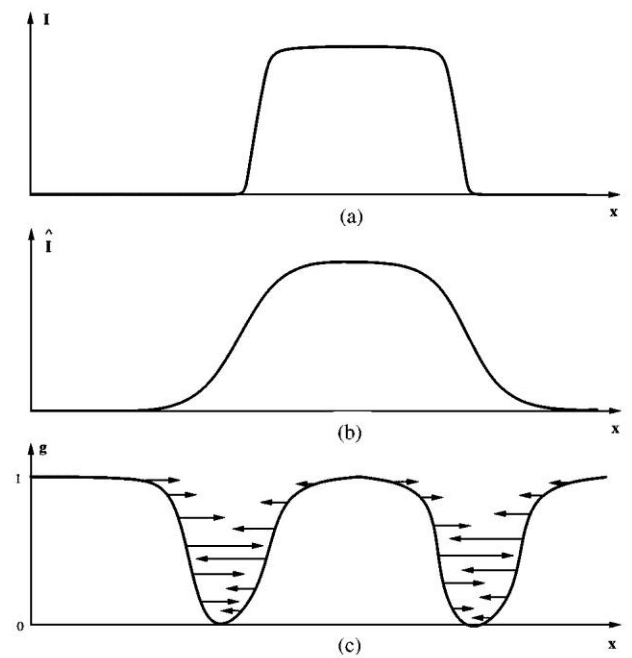


Figure 1. Geometric interpretation of the attraction force in 1D. The original edge signal I, its smoothed version $\hat{I}$, and the derived stopping function g are given. The evolving contour is attracted to the valley created by $\nabla g \cdot \nabla u$ (see text).