

Tema 10

Moviment ondulatori: característiques generals

- 10.1. Ones periòdiques
- 10.2. Descripció matemàtica d'una ona
- 10.3. Velocitat i energia en el moviment ondulatori transversal
- 10.4. Velocitat i energia en el moviment ondulatori longitudinal
- 10.5. Interferència i superposició d'ones
- 10.6. Modes normals
- 10.7. Efecte Doppler

10.1. Ones periòdiques

Tipus d'ones

Existeixen molts tipus d'ones: ones sonores, ones en la mar, ones de llum, de ràdio, i altres ones electromagnètiques.

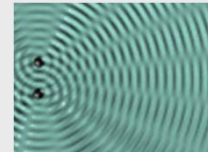
Estudiarem aquí les ones en medis deformables o elàstics, per exemple les ones sonores en l'aire, que en general s'anomenen ones mecàniques.

Es tracta d'una pertorbació que es propaga, sense efectuar desplaçament del medi com un tot.

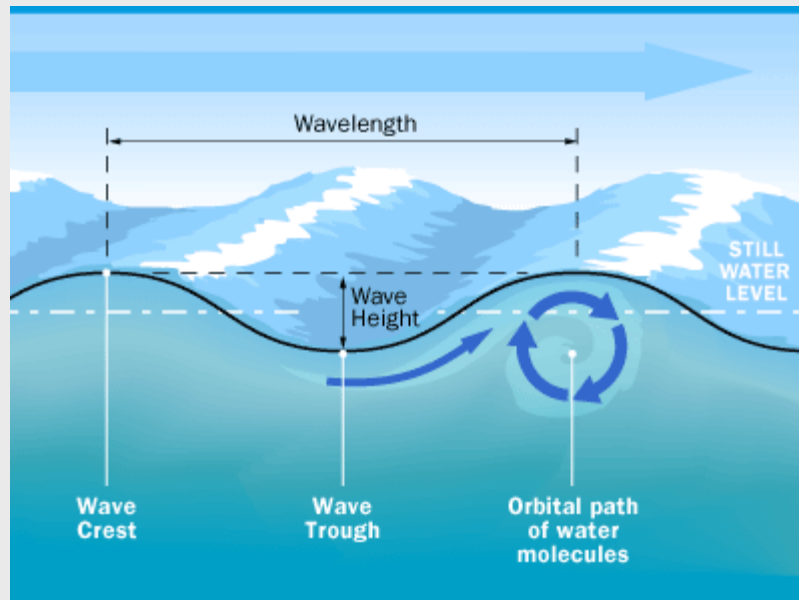
Les ones poden ser transversals o longitudinals (segons el moviment de les partícules en relació a la direcció de propagació) o ambdues alhora.

Les ones poden ser 1- 2- i 3-dimensionals

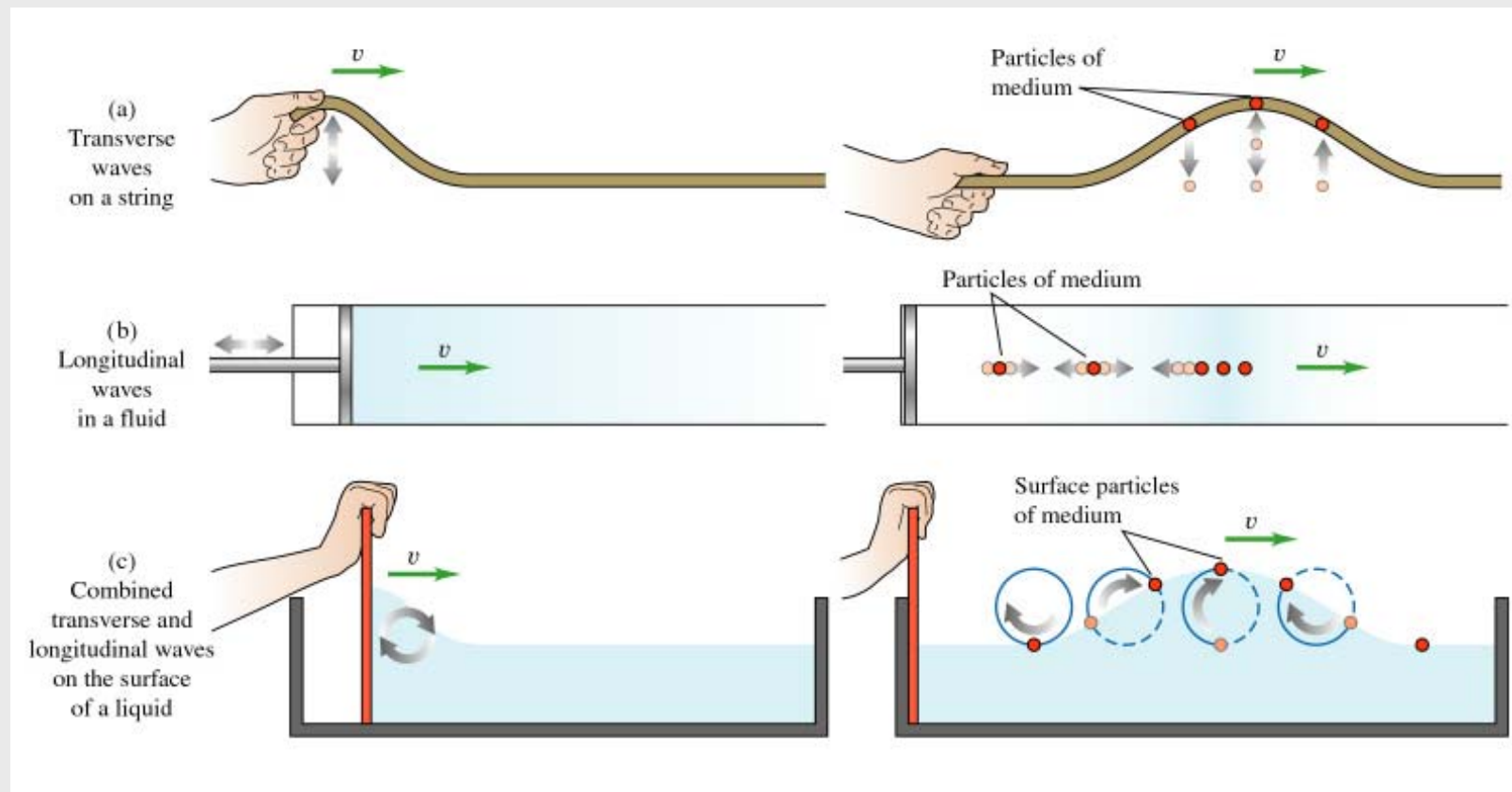
Les ones poden ser periòdiques, o consistir en un únic pols



10.1. Ones periòdiques



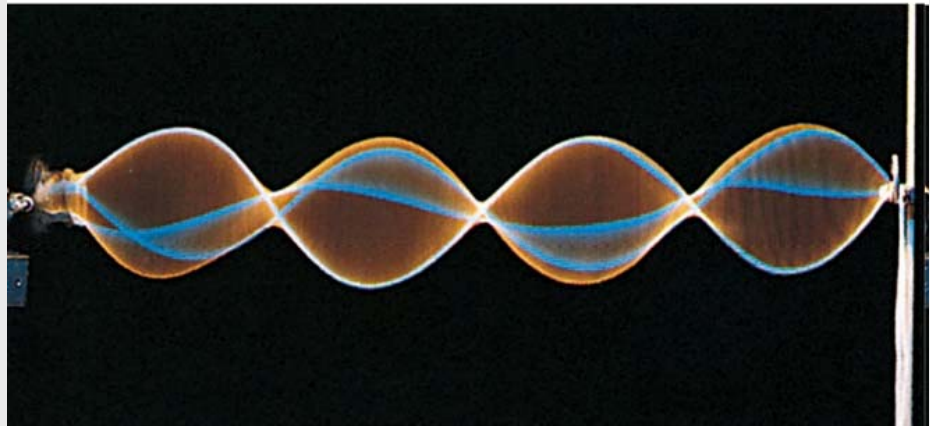
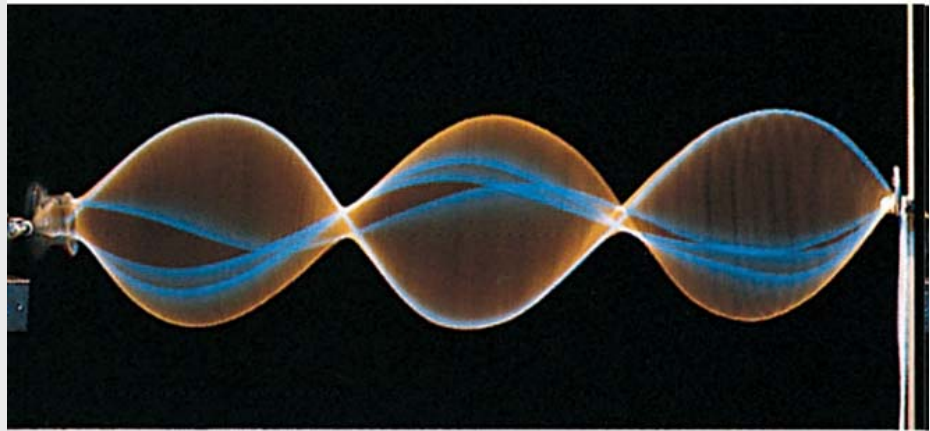
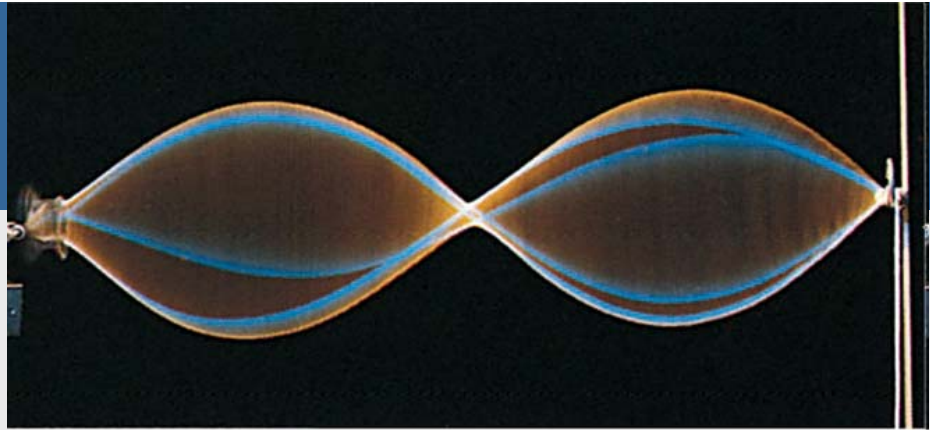
10.1. Ones periòdiques



10.1. Ones periòdiques

Modes normals de les ones transversals estacionàries en una corda

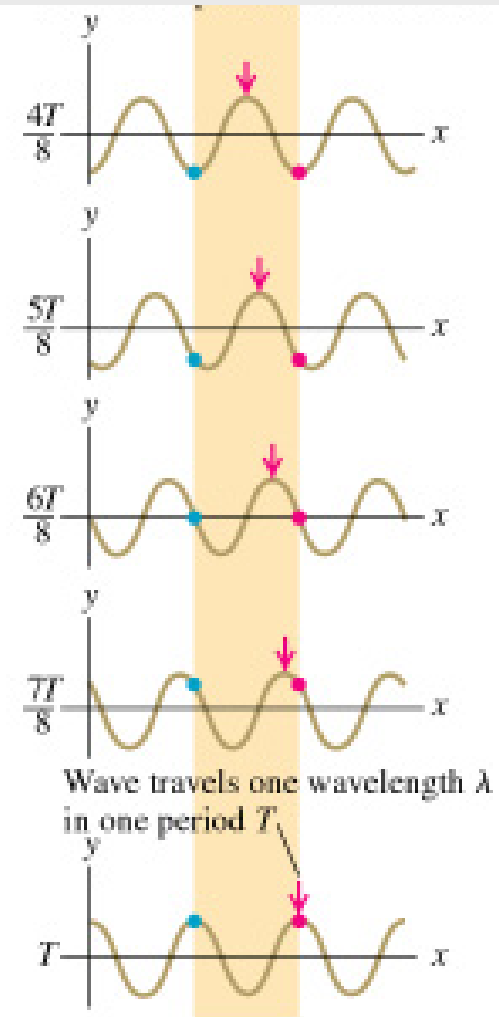
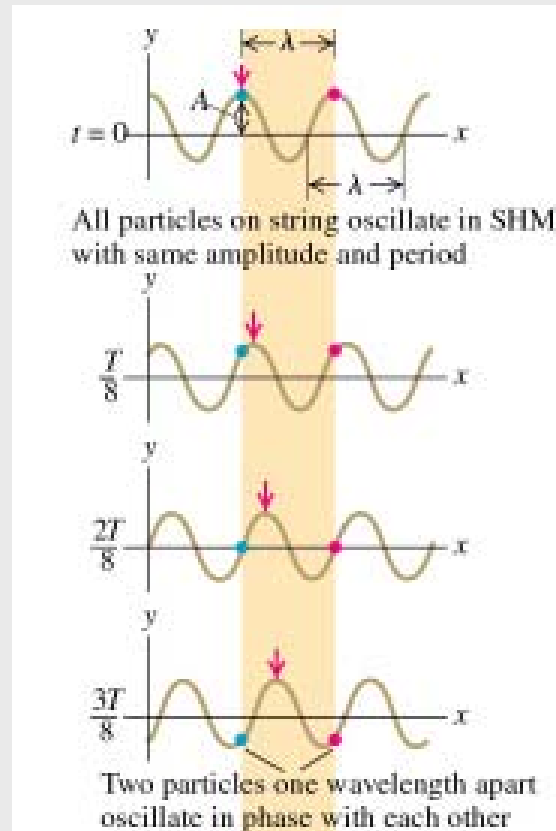
[Simulació](#)



10.1. Ones periòdiques

Ona sinusoidal transversal que viatja en una corda

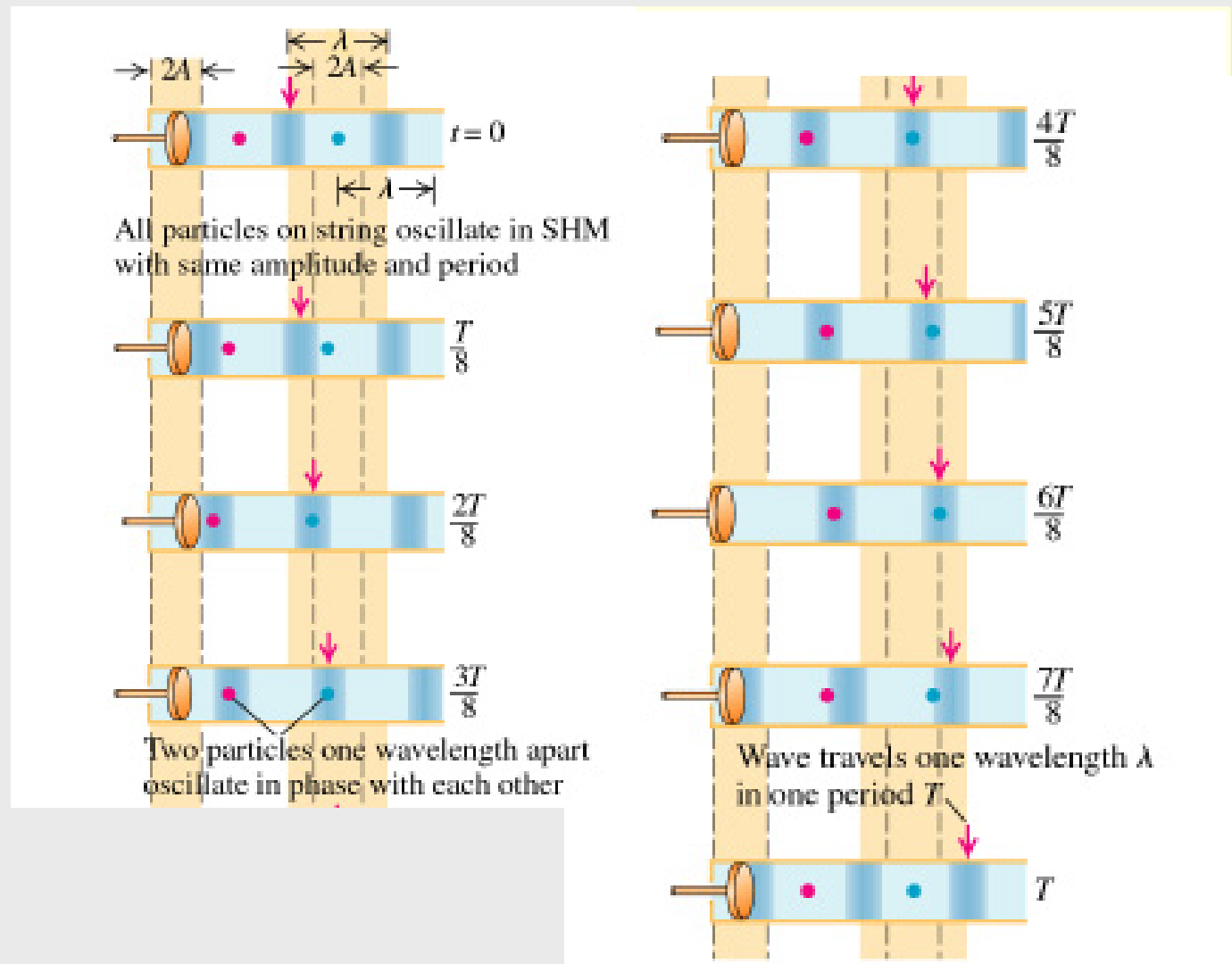
Longitud d'ona: λ



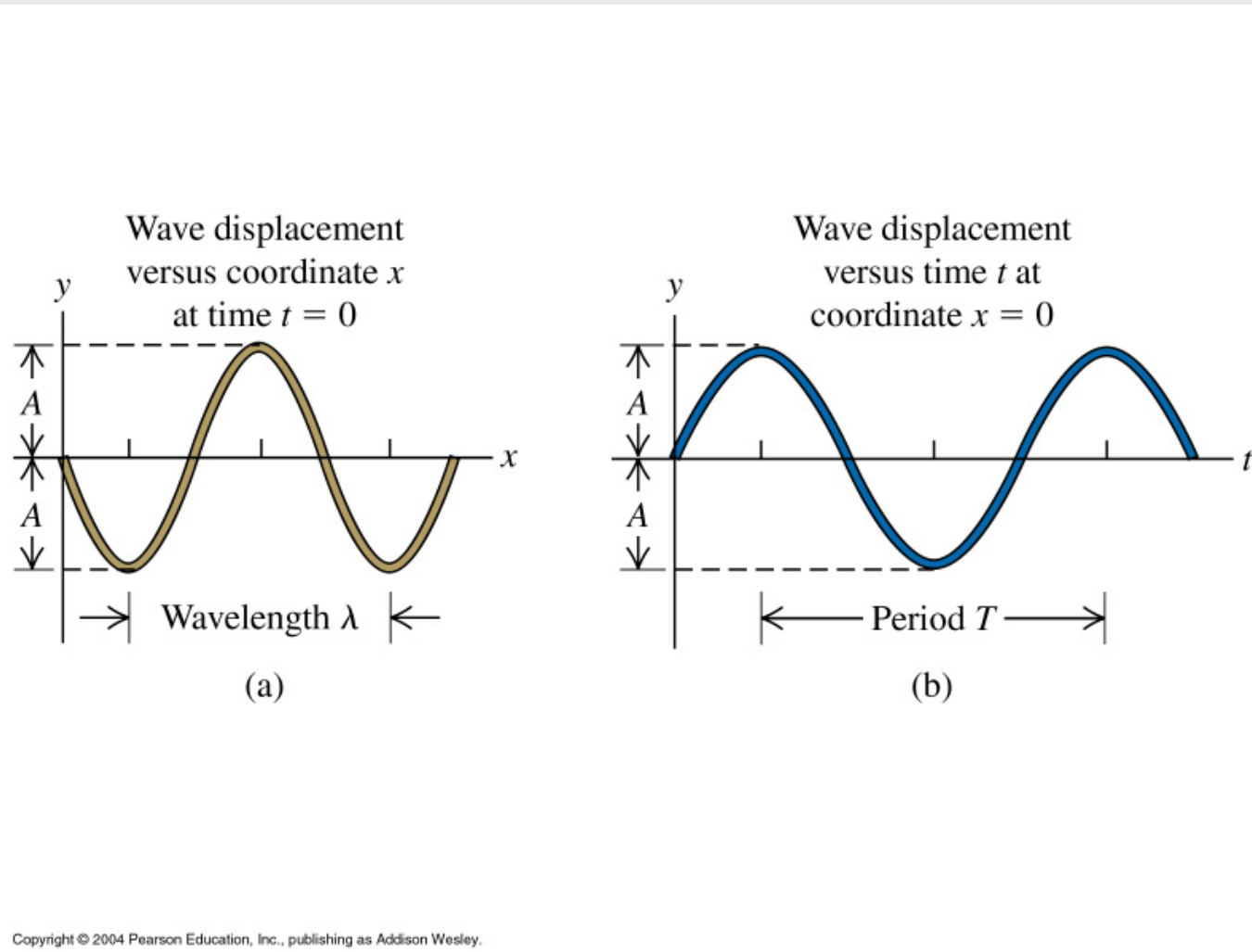
10.1. Ones periòdiques

Ona sinusoidal longitudinal que viatja per un fluid

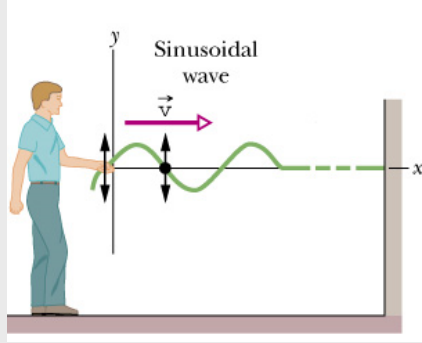
Longitud d'ona: λ



10.2. Descripció matemàtica d'una ona



10.2. Descripció matemàtica d'una ona



Totes les partícules de la corda oscil·len amb un MHS amb la mateixa amplitud i període

$$y(x=0, t) = A \cos[\omega t]$$

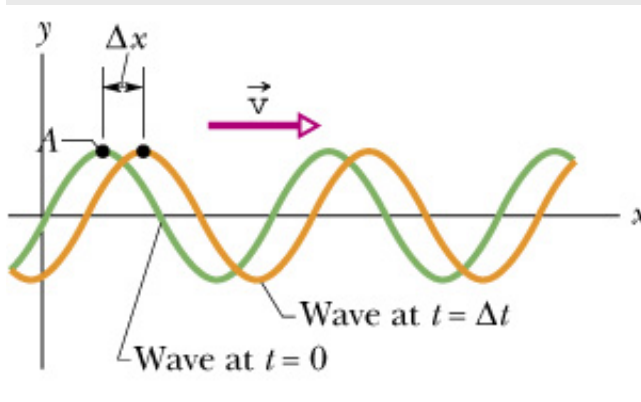
Ona sinusoidal movent-se en la direcció +x

$$x = vt$$

En el punt x:

$$t = \frac{x}{v}$$

$$y(x, t) = A \cos \left[\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] = A \cos 2\pi f \left(\frac{x}{v} - t \right)$$



Longitud d'ona: λ

$$\lambda = v/f$$

Amplitude

Displacement

Oscillating term

Phase

Angular wave number

Position

Time

Angular frequency

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y(x, t) = A \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$

10.2. Descripció matemàtica d'una ona

Número d'ona: k $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

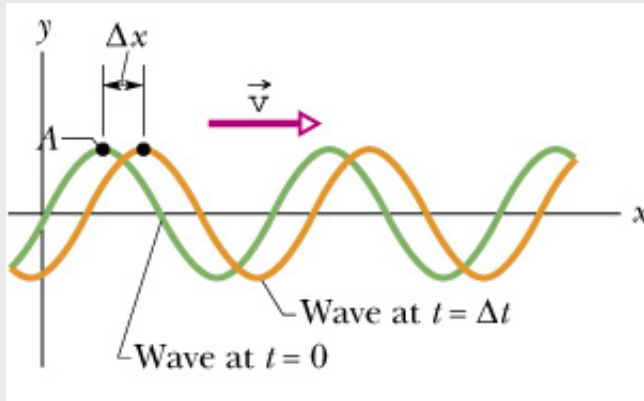
$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

$$\omega = vk$$

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$$

10.3. Velocitat i energia en el moviment ondulatori

Velocitat d'una ona transversal



En l'instant t_1 a la posició x_1 , y val:

$$y(x_1, t_1) = A \cos(kx_1 - \omega t_1)$$

En l'instant t_2 a la posició x_2 , y té el mateix valor:

$$y(x_1, t_1) = y(x_2, t_2) = A \cos(kx_2 - \omega t_2)$$

Així l'argument ha de ser constant: $kx - \omega t = ct$.

Derivant respecte al temps
Obtenim la velocitat d'ona:

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\omega}{k}} > 0$$

Una ona que es desplaça en sentit positiu vindrà descrita com hem vist per :

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Una ona que es desplaça en sentit negatiu vindrà descrita per :

$$y(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$$

10.3. Velocitat i energia en el moviment ondulatori

Desplaçament en el punt x

Velocitat transversal d'una partícula

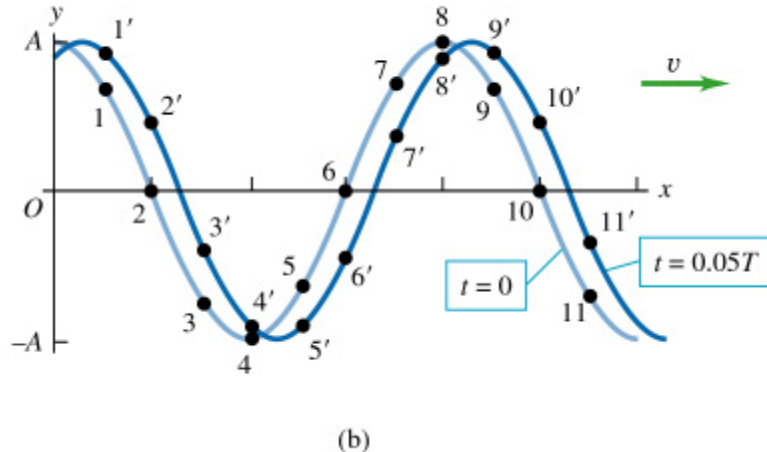
Acceleració transversal

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$$

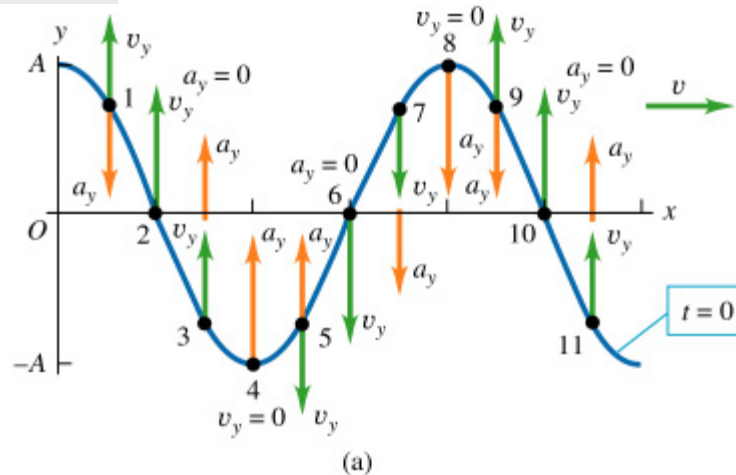
$$v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$a_y = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x,t)$$

Desplaçament de l'ona



L'acceleració en cada punt és proporcional al desplaçament y en eixe punt.
L'acceleració va cap amunt on la corda es corba cap amunt i vice-versa



10.3. Velocitat i energia en el moviment ondulatori

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Escriu les següents derivades (en funció de y)

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} =$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} =$$

Calcula

$$\frac{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}} =$$

Així demostrem l'equació d'ona

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

10.3. Velocitat i energia en el moviment ondulatori transversal

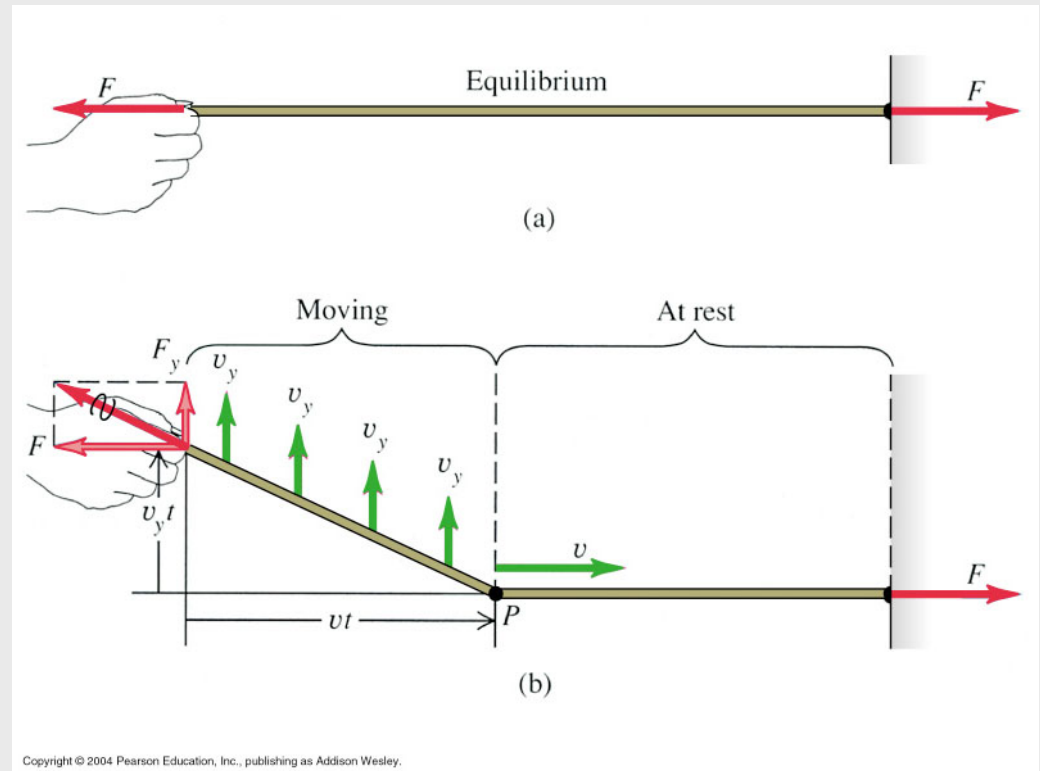
Velocitat d'una ona transversal en una corda

F : Tensió de la corda

μ : densitat lineal de massa
(m/L)

La tensió relaciona la velocitat vertical y la velocitat d'ona
Considerant el canvi de
quantitat de moviment s'obté

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$



10.3. Velocitat i energia en el moviment ondulatori transversal

Problema

Una ona sinusoidal transversal s'ha generat al final d'una corda llarga horitzontal, per una barra que es mou amunt i avall una distància de 0.50 cm. El moviment és continu i es repeteix regularment 120 voltes per segon.

- (a) Si la corda té una densitat lineal de 0.25 kg/m i es manté a una tensió de 90 N, troba la velocitat, amplitud, freqüència i longitud d'ona del moviment ondulatori.
- (b) Suposa que la ona es mou en la direcció $+x$ i que, en $t=0$, el cap de la corda descrit per $x=0$ es troba en la seua posició d'equilibri $y=0$. Escribeu l'equació de l'ona.
- (c) Troba la velocitat i acceleració d'una partícula a 62 cm del cap de la corda.

10.3. Velocitat i energia en el moviment ondulatori transversal

La **potència** d'una **ona transversal** ve donada per:

$$P(x,t) = \vec{F}(x,t) \cdot \vec{v}(x,t) = F_y(x,t) \cdot v_y(x,t) = -F \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$P(x,t) = Fk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Per tant, la potència màxima serà:

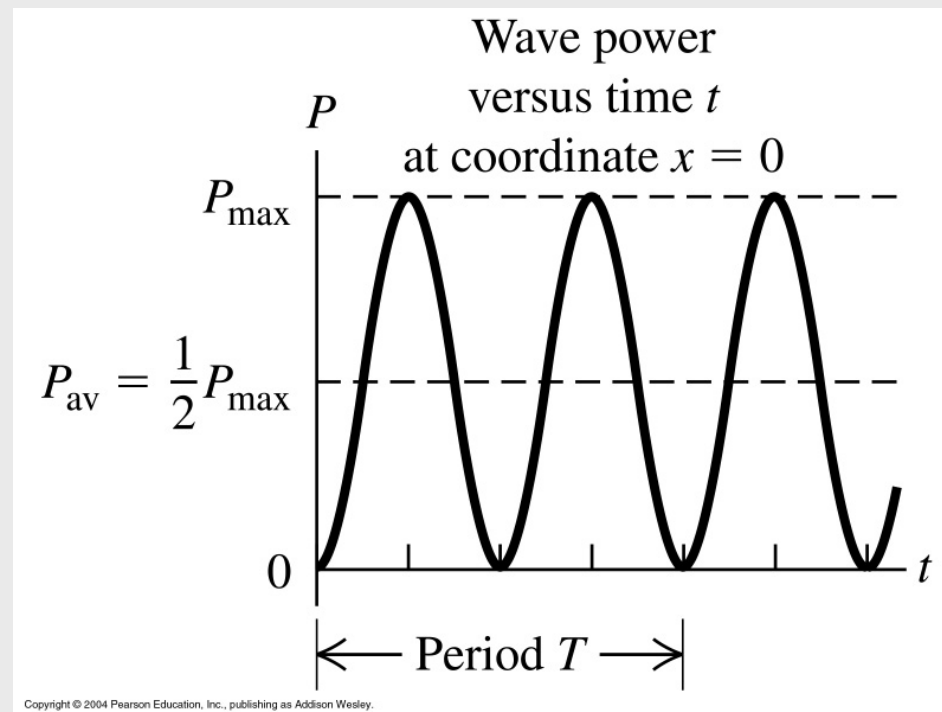
$$P_{\text{màx}} = Fk\omega A^2$$

En el cas d'una corda:

$$P_{\text{màx}} = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

La potència mitja, en el cas d'una corda:

$$P_{\text{màx}} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$



10.3. Velocitat i energia en el moviment ondulatori transversal

Intensitat d'una ona es defineix com la rapidesa mitja amb que una ona transmet energia per unitat d'àrea:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

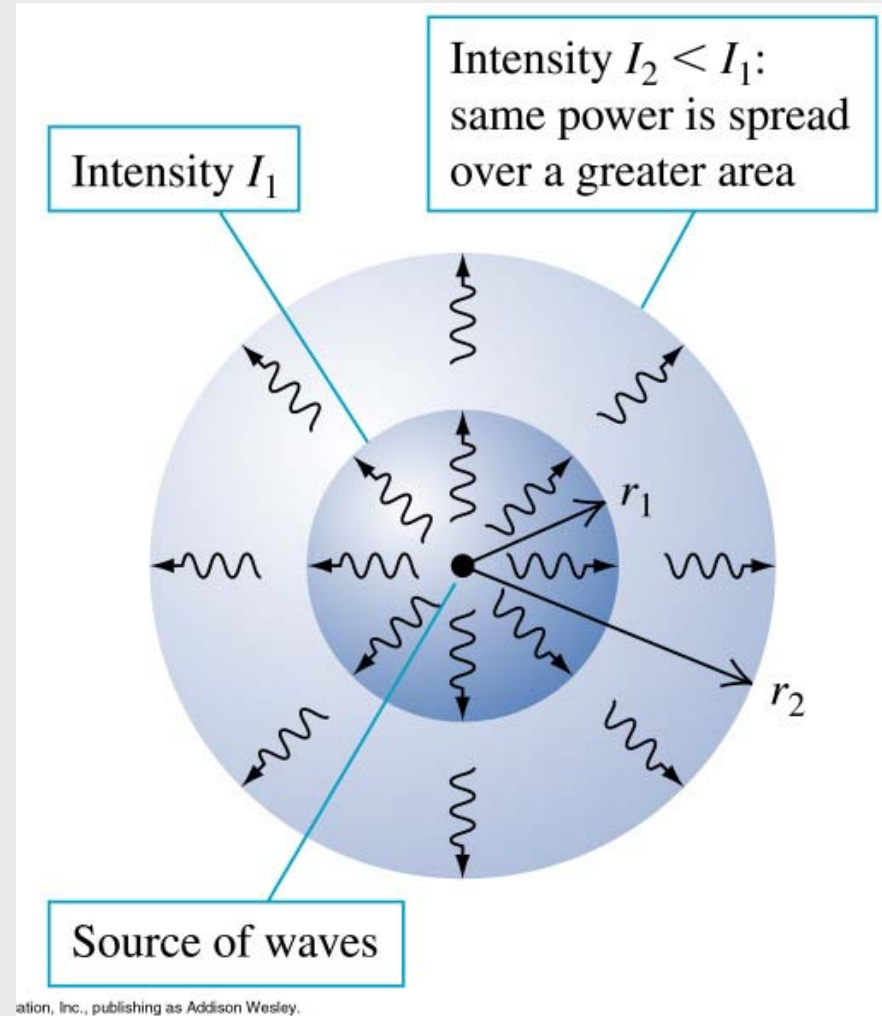
Si comparem les intensitat a distintes distàncies:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Si recordem l'expressió de la potència:

$$I \propto P_{\text{màx}} = Fk\omega A^2$$

L'ona perd amplitud amb la distancia



10.3. Velocitat i energia en el moviment ondulatori transversal

Problema

S'emeten ones esfèriques d'una font d'1.0 watt en un medi isotròpic que no absorbeix. Quina és la intensitat de l'ona a 1.0 m de la font?

9.4. Velocitat i energia en el moviment ondulatori longitudinal

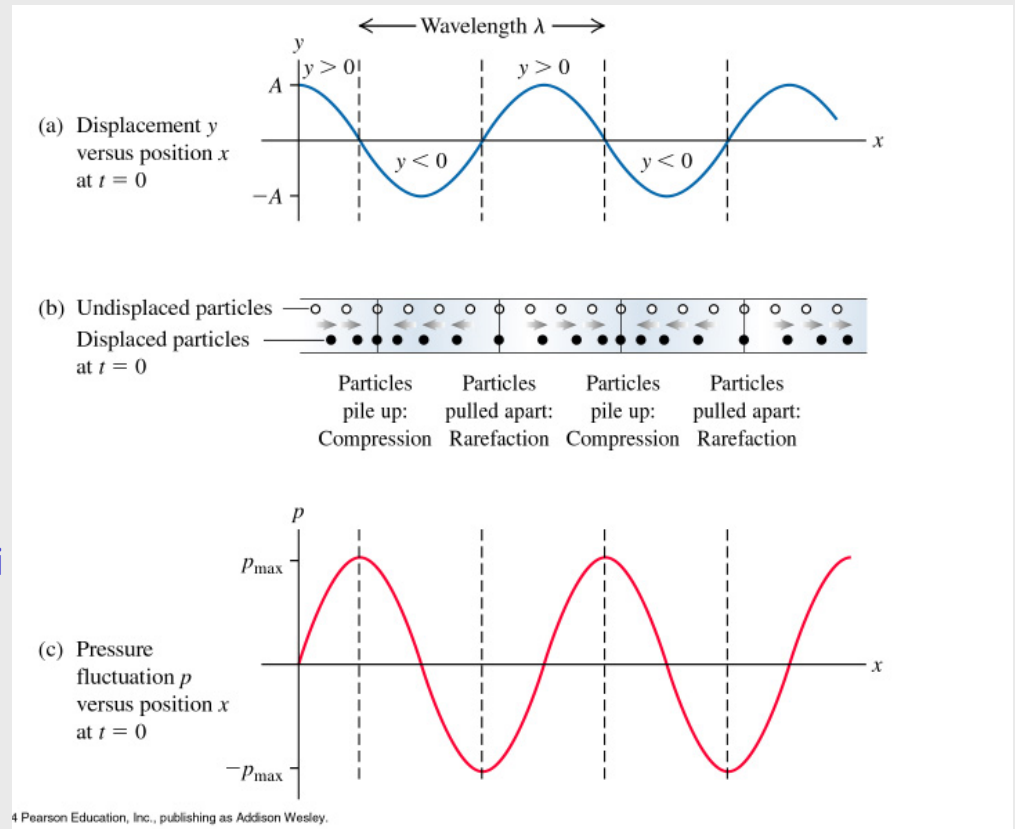
Ones Sonores

Les ones longitudinals comporten desplaçaments paral·lels a la direcció de propagació de l'ona. Les sonores, són ones longitudinals, que es poden descriure en termes de variacions de la pressió.

La velocitat de les ones sonores és

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

on B és el mòdul volumètric i ρ la densitat del medi



9.4. Velocitat i energia en el moviment ondulatori longitudinal

Les ones sonores són ones mecàniques longitudinals.

En l'interval de freqüències de 20 Hz a 20.000 Hz, les ones mecàniques longitudinals poden estimular l'oïda humana i s'anomenen ones sonores (baixa freqüència greus, alta freqüència aguts). Aquest és el domini de freqüències audibles. En freqüències major tenim ultrasons, i en menors, infrasons.

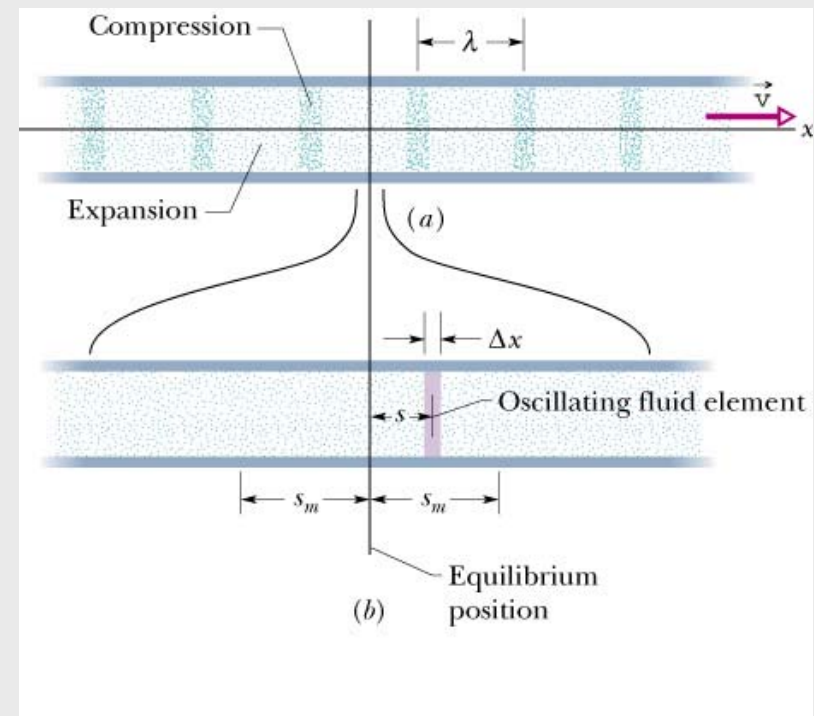
L'amplitud de la fluctuació de pressió en una ona sonora és

$$p_{\max} = BkA$$

On B és la compresibilitat del medi, k el número d'ona i A l'amplitud de l'ona.

La intensitat de les ones sonores es defineix a partir del valor promig del producte $p(x,t) \cdot v(x,t)$ que dona

$$I = \frac{1}{2} B \omega k A^2$$



9.4. Velocitat i energia en el moviment ondulatori longitudinal

Utilitzant les relacions

$$\omega = v \cdot k \quad \text{i} \quad v^2 = B / \rho$$

La darrera vàlida per a ones mecàniques, obtenim

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} \omega^2 A^2 = \frac{p_{\max}^2}{2 \sqrt{\rho B}}$$

Per a donar la mateixa intensitat, l'amplitud ha de ser molt major en vibracions de baixa freqüència (*woofer*) que en vibracions de alta freqüència (*tweeter*)

Degut a la gran variabilitat de la intensitat del so perceptible per l'oida, el nivell d'intensitat de so es dona en l'escala de decibelis (dB) que es defineix amb

$$\beta = (10\text{dB}) \log \frac{I}{I_0}$$

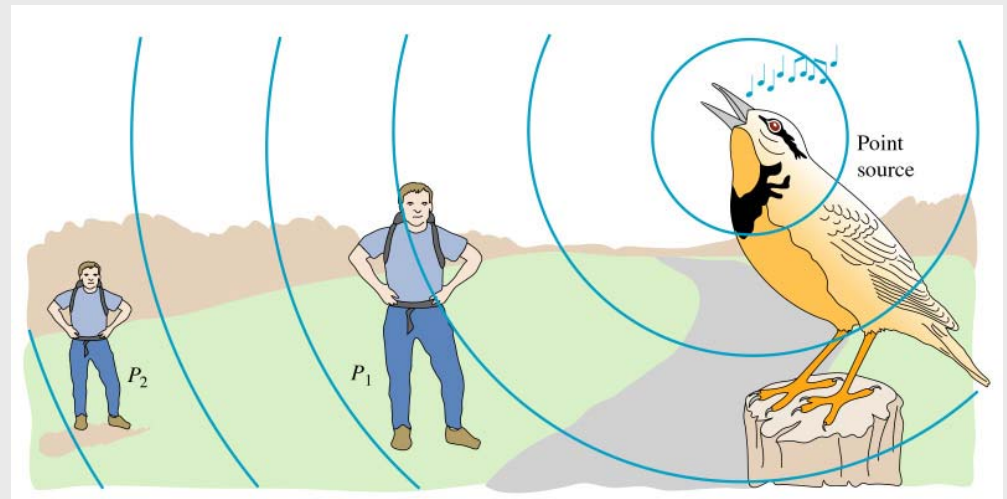
Sent I_0 una intensitat de referència que es pren 10^{-12} W/m^2 , que correspon al llindar de l'oïda humana.

9.4. Velocitat i energia en el moviment ondulatori longitudinal

Problema

Suposem que un pardalet que canta emet una potència sonora constant. ¿Quants decibelis baixarà el nivell d'intensitat del so si ens allunyem el doble de la distància del pardal?

Sol: 6 dB



10.4. Velocitat i energia en el moviment ondulatori longitudinal

Problema

La màxima variació de pressió, p_{max} , que pot tolerar l'oïda en sons alts és prop de 28 N/m^2 ($=28 \text{ Pa}$). La pressió atmosfèrica normal és de 100000 Pa , aproximadament.

- (a) Troba el màxim desplaçament d'una ona de so en aire amb una freqüència de 1000 Hz .
- (b) En el so més lleu que es pot sentir a 1000 Hz l'amplitud de pressió és d'uns $2.0 \times 10^{-5} \text{ Pa}$. Troba l'amplitud de desplaçament corresponent.

10.5. Interferència i superposició d'ones

Principi de superposició:

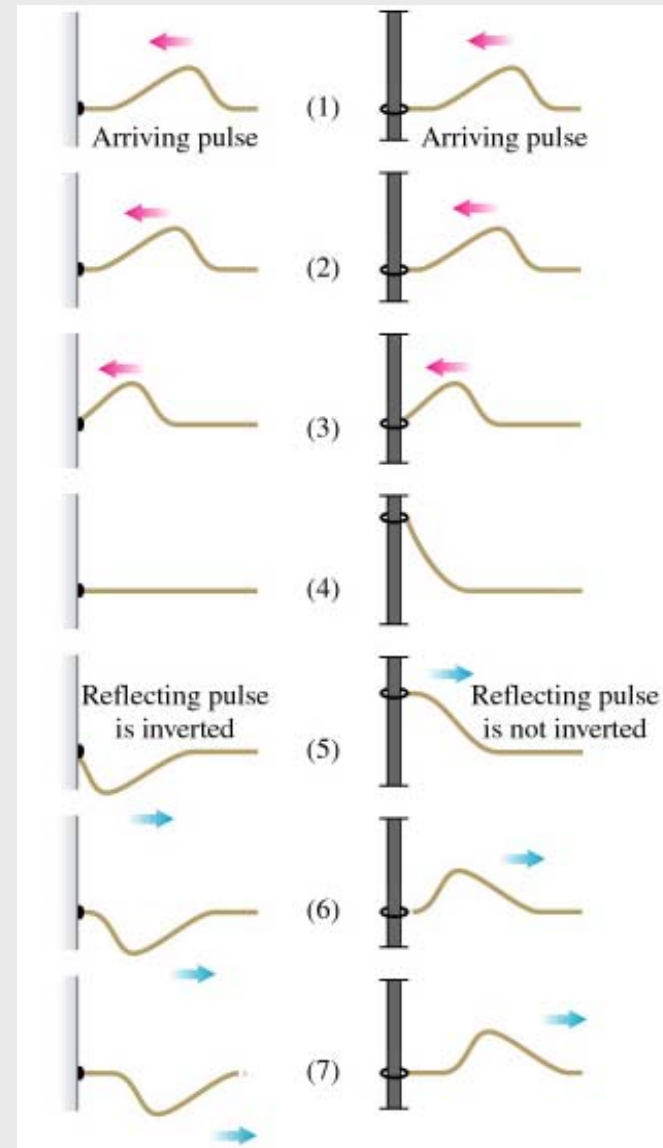
Quan dos o més ones es mouen en el mateix medi lineal, el desplaçament net del medi, en qualsevol punt, és igual a la suma algebraica dels desplaçaments de totes les ones components

$$y = y_1 + y_2$$

10.5. Interferència i superposició d'ones

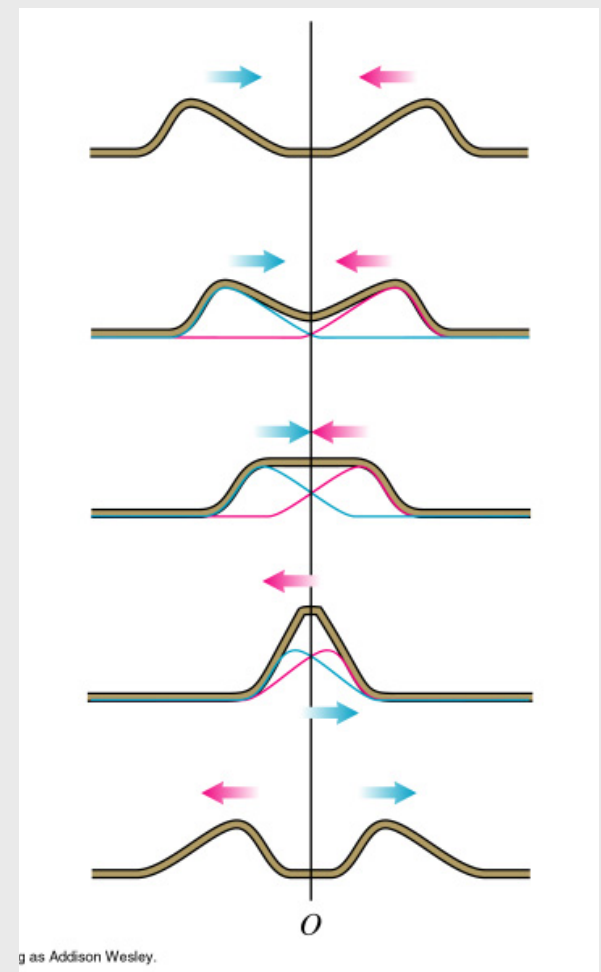
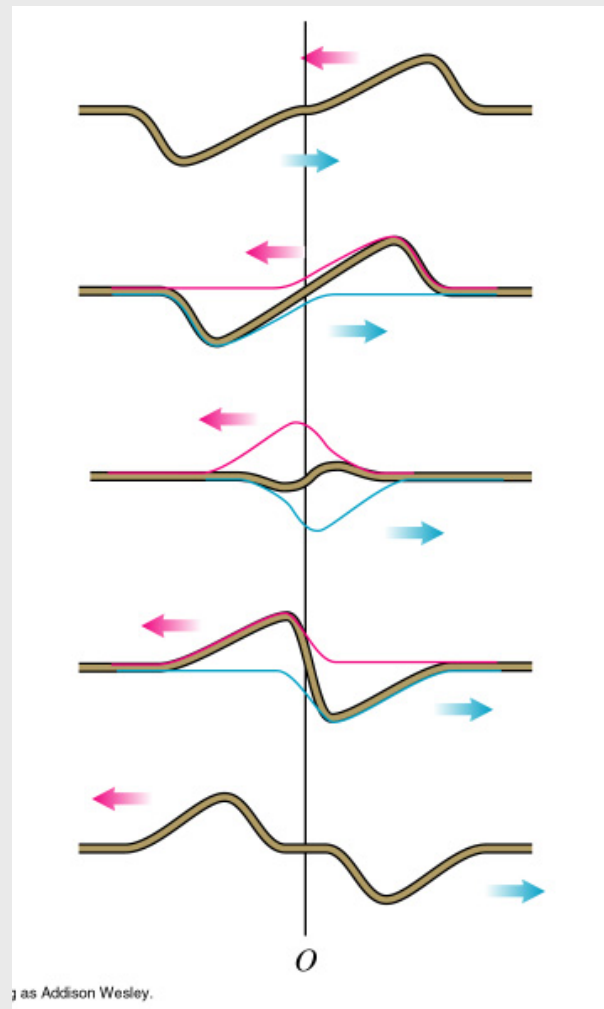
Reflexió d'un puls d'ona:

1. En un extrem fix
2. En un extrem lliure



10.5. Interferència i superposició d'ones

Superposició de polsos
d'ona que viatgen en
direccions opostes



10.5. Interferència i superposició d'ones

Ones que viatgen en la mateixa direcció

$$y_1 = A_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A_0 \sin(kx - \omega t - \phi)$$

$$y = \left(2A_0 \cos \frac{\phi}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2} \right)$$

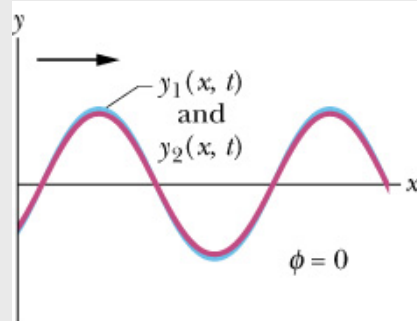
En fase: $\phi = 0$, es una interferència constructiva

En oposició de fase, $\phi = 180^\circ$, és interferència destructiva

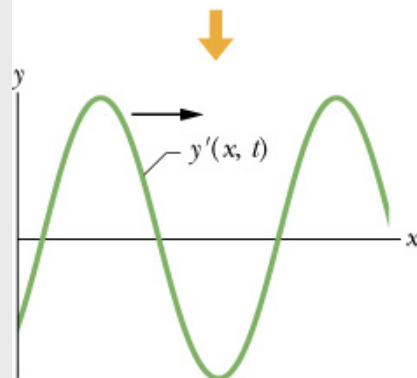
10.5. Interferència i superposició d'ones

Interferència

(1) Constructiva

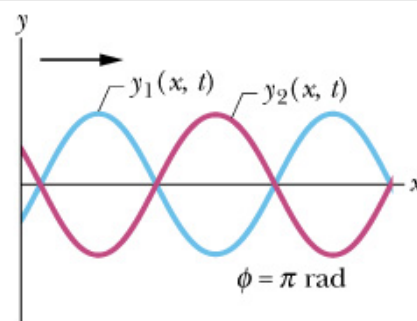


(a)

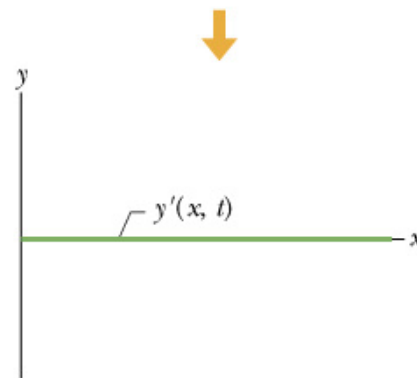


(d)

(2) Destructiva

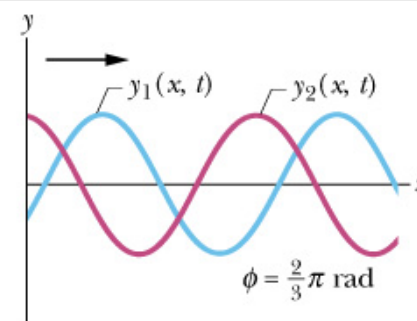


(b)

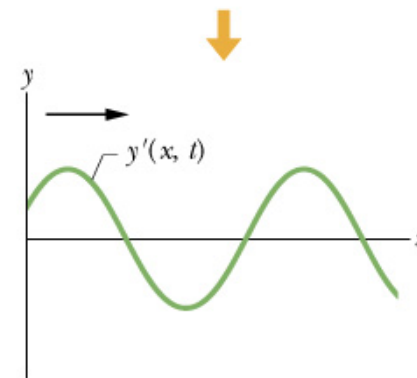


(e)

(3) Intermèdia



(c)



(f)

10.5. Interferència i superposició d'ones

Problema

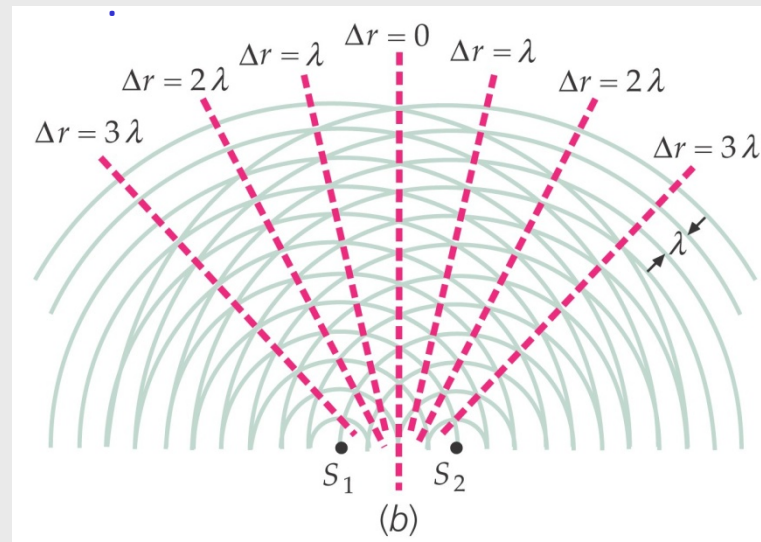
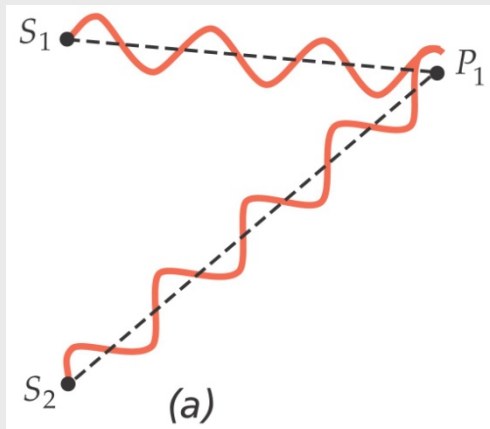
Considera dos focus puntuals S_1 i S_2 que emeten ones de la mateixa freqüència i amplitud. Les ones comencen amb la mateixa fase, i esta relació es manté amb el temps. Considera un punt P que esta a distàncies r_1 i r_2 molt paregudes, de S_1 i S_2 .

(a) Demuestra que la superposició de les dues ones dóna una ona d'una amplitud que varia amb la posició de P segons

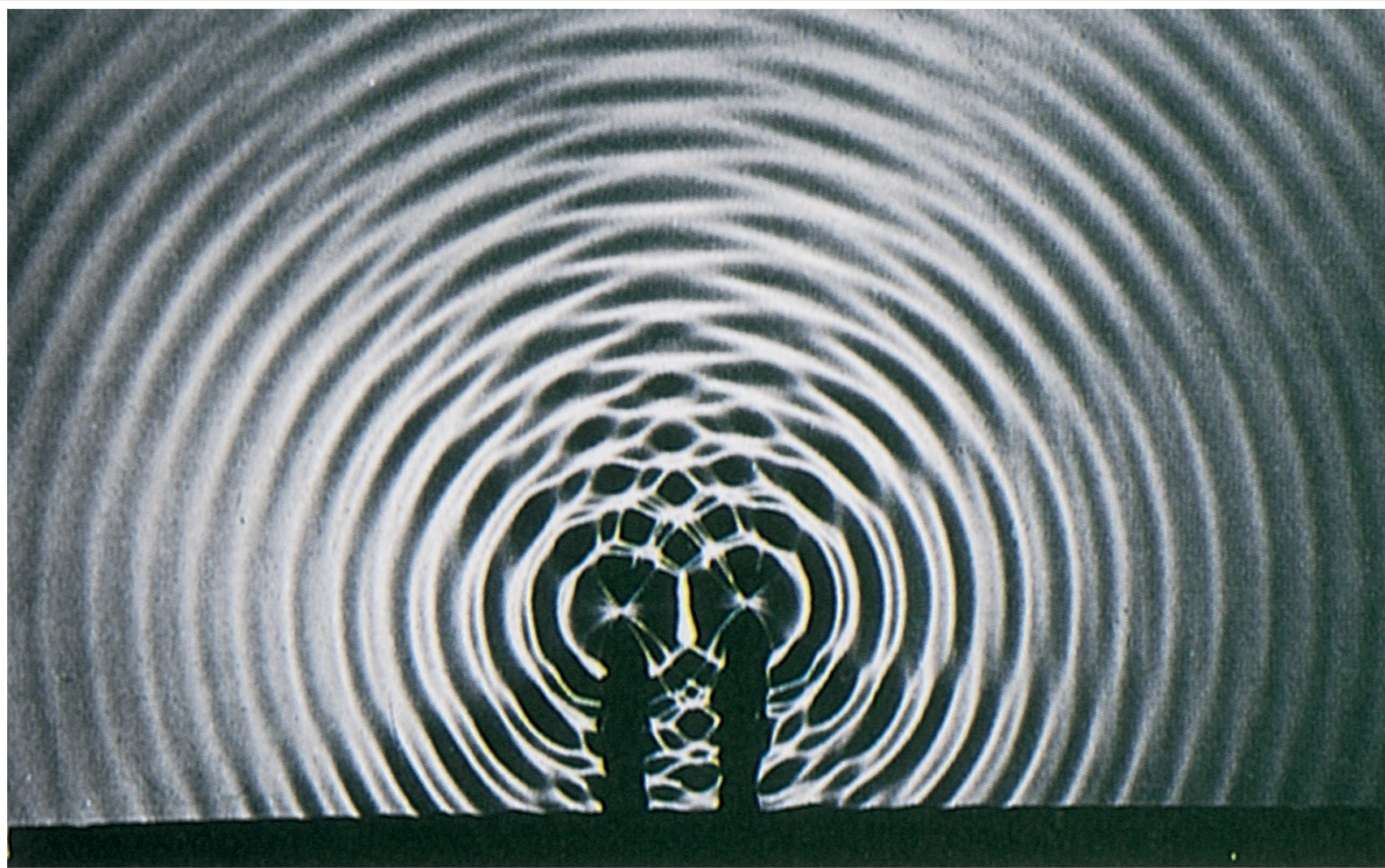
$$\frac{2Y}{r} \cos \frac{k}{2}(r_1 - r_2)$$

on $r = (r_1 + r_2)/2$ $r_1 - r_2 = n\lambda$

(b) Demuestra que la vibració s'anul·la quan $r_1 - r_2 = (n + 1/2)\lambda$, sent n un sencer, i que la composició màxima ocorre quan



10.5. Interferència i superposició d'ones



10.5. Interferència i superposició d'ones

Ones que viatgen en direccions oposades creen una ona estacionària

$$y_1 = A_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$y = (2A_0 \sin kx) \cos \omega t$$

[Simulacio](#)

10.5. Interferència i superposició d'ones

Ones que viatgen en direccions oposades creen una ona estacionària

Antinodes: l'amplitud és màxima

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \dots$$

$$x = \frac{n\lambda}{4} \quad (n = 1, 3, 5..)$$

Nodes: l'amplitud és zero

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi$$

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2} \dots$$

$$x = \frac{n\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3...)$$

10.5. Interferència i superposició d'ones

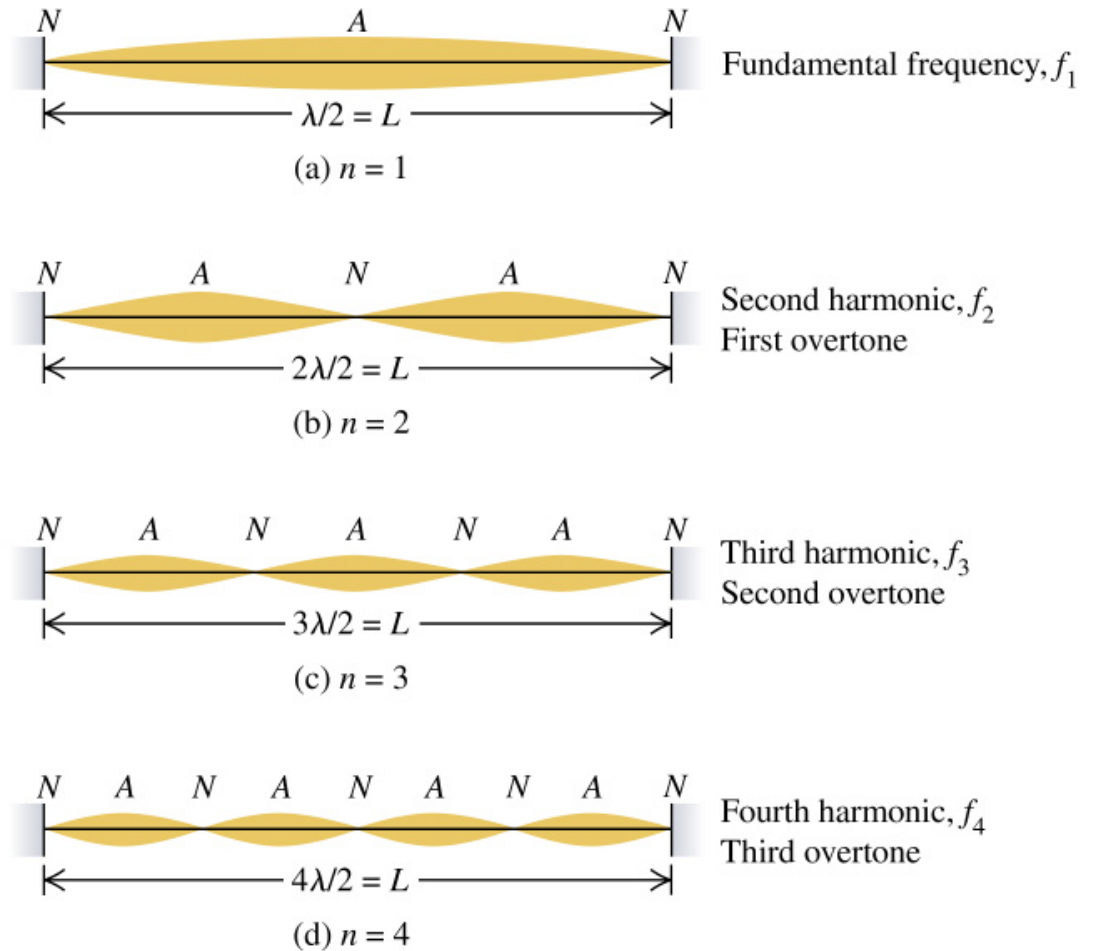
Ones estacionàries en una corda fixa

Primer mode normal

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

Altres modes normals

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$



10.6. Modes normals

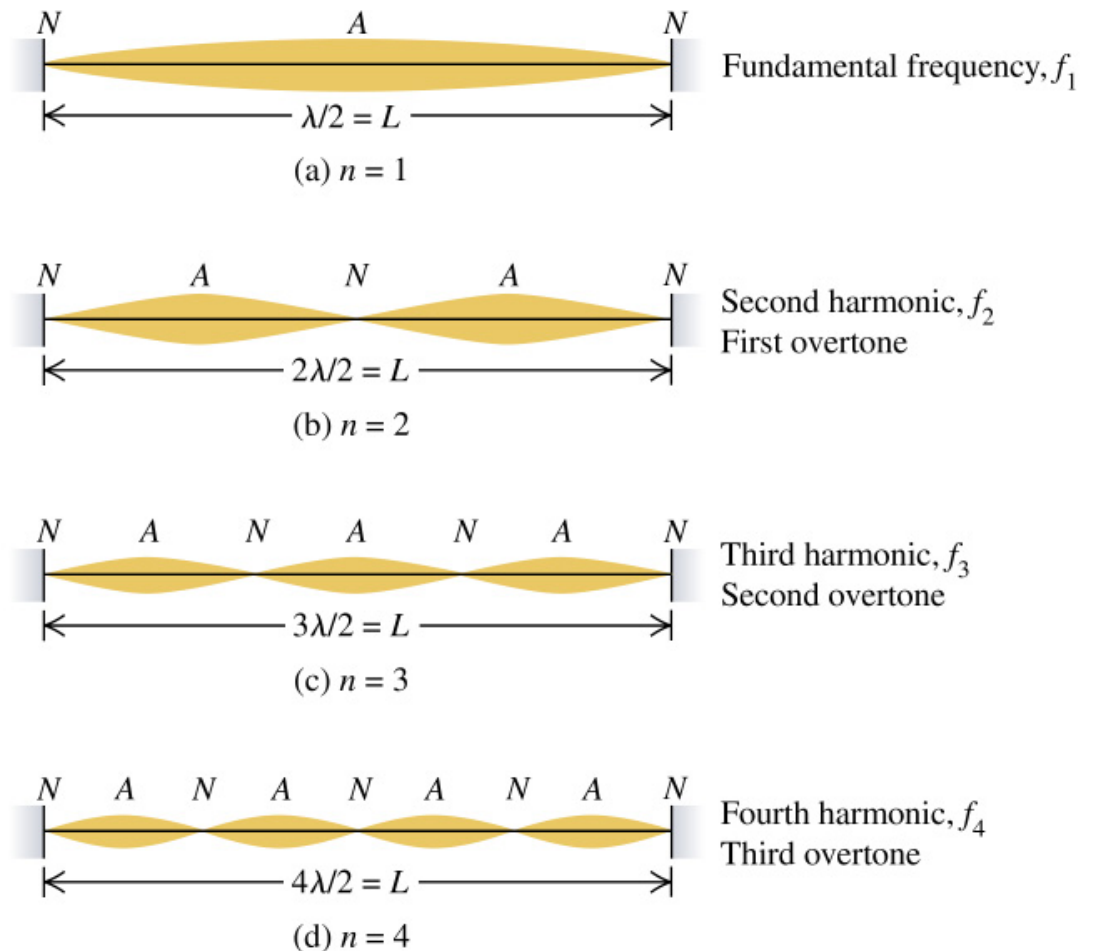
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

En cordes fixades pels dos extrems, les freqüències d'oscil·lació possibles venen donades per

$$f_n = \frac{n}{2L} v \quad (n=1,2,3\dots)$$

On n és el número de l'harmònic i f_1 la freqüència fonamental

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$



10.6. Modes normals

Problema

Una de les cordes d'una guitarra està en el eix x quan es troba en equilibri. El extrem en $x=0$ (el pont de la guitarra) està fix. Una ona senoidal incident viatja per la corda en direcció $-x$ a 143.0 m/s amb amplitud 0.750 mm i freqüència de 440 Hz . Esta ona es reflexa en l'extrem fix en $x=0$, i la superposició de la ona viatjera incident i reflexada forma una ona estacionària.

(a) Obteniu l'equació que dóna el desplaçament d'un punt de la corda en funció de la posició i el temps.

(b) Trobeu els punts de la corda que no es mouen.

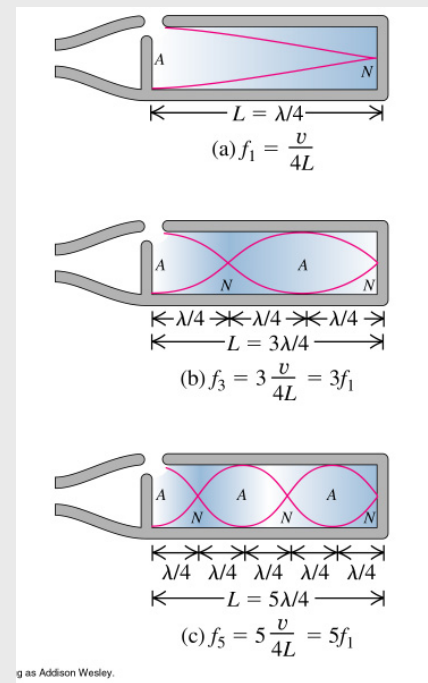
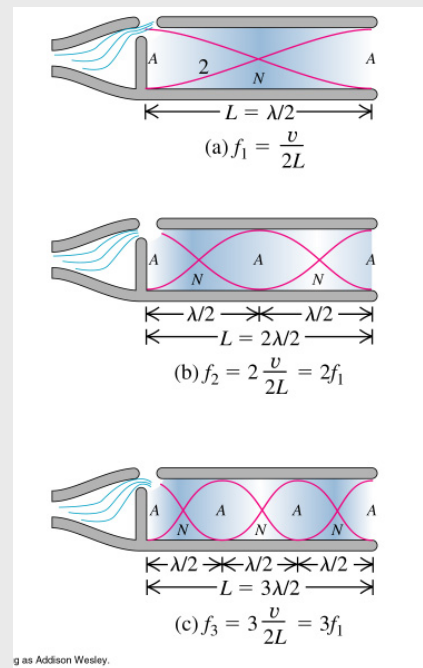
(c) Calcula l'amplitud, la velocitat transversal màxima i l'acceleració transversal màxima en els punts de màxima oscil·lació.

10.6. Modes normals

Problema

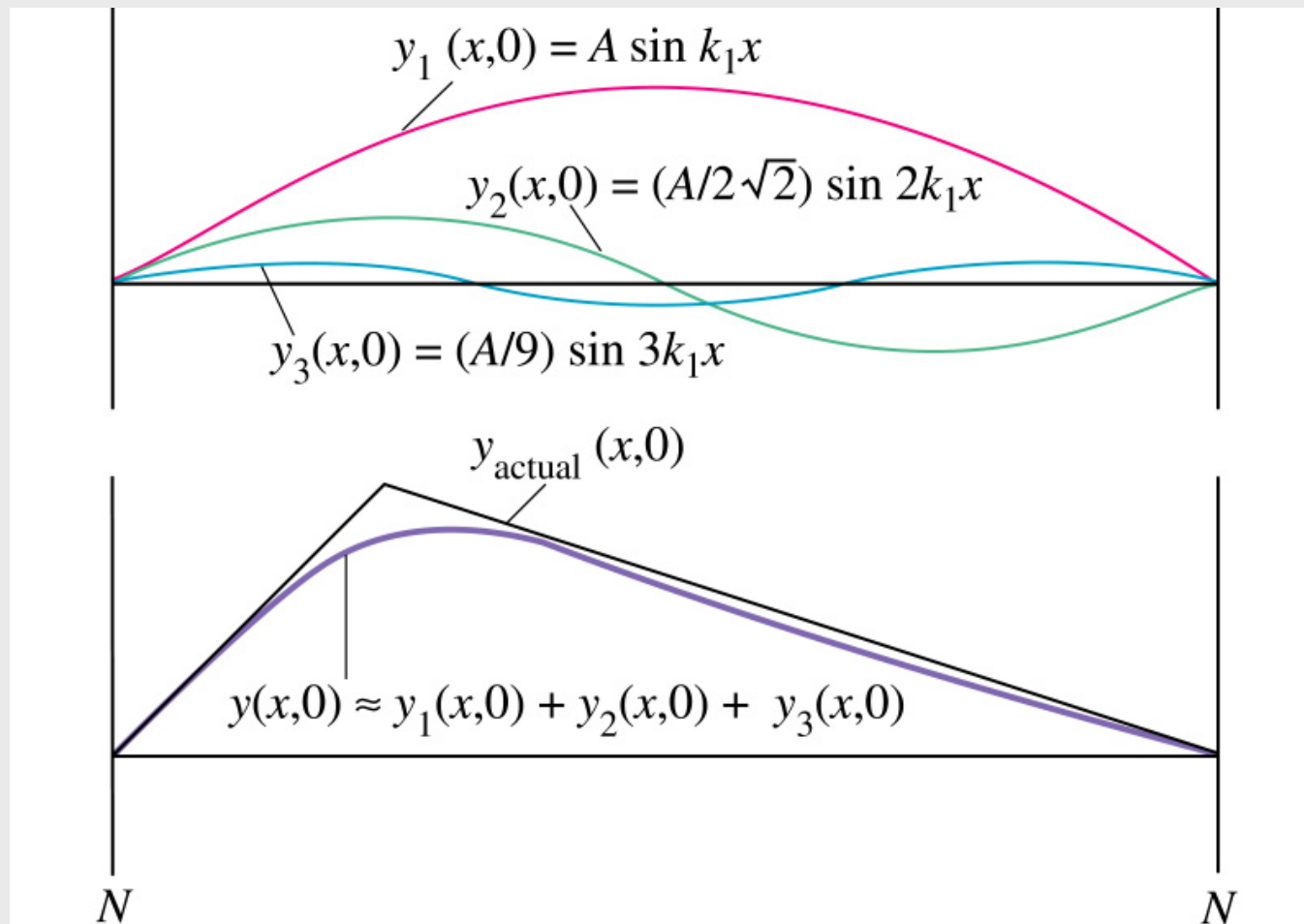
El tub d'un orgue obert te una freqüència fonamental de 300 Hz. El primer sobretò d'un orgue de tub tancat te la mateixa freqüència que el primer sobretò del de tub obert. Com de llarg es cada tub?

Observa que en el tub tancat sols són possibles els harmònics imparells (Resposta: 55 cm i 44 cm)

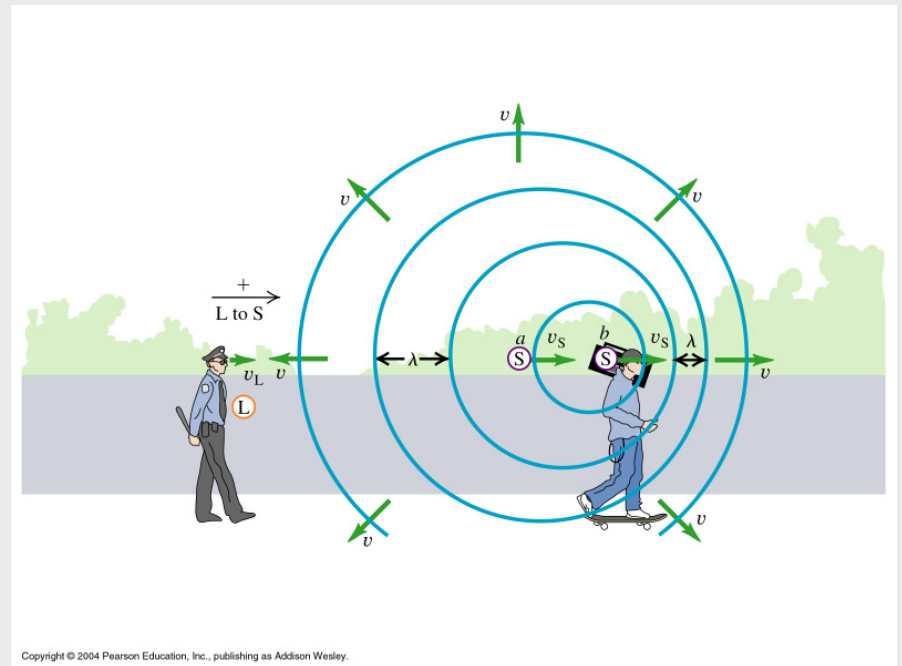
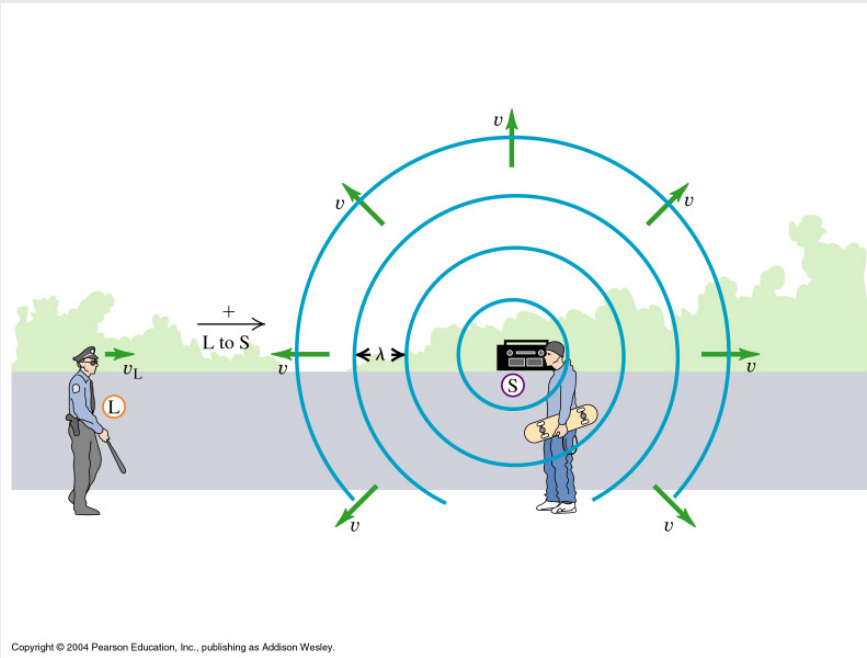


10.6. Modes normals

Ones Complexes: Si agafem la corda d'una guitarra donant-li una forma triangular i la soltem, es produeix una ona estacionària que es representa prou be amb la suma de sols tres modes de vibració sinusoidals



10.7. Efecte Dopler



$v \rightarrow$ La velocitat del so (340 m/s)

$v_L \rightarrow$ La velocitat del receptor

$v_S \rightarrow$ La velocitat del emissor

$f_L \rightarrow$ Freqüència en receptor

$f_S \rightarrow$ Freqüència en l'emissor

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S$$

10.7. Efecte Dopler

Problema

Si un receptor R està en repòs i una sirena de freqüència $f=300$ Hz s'allunya a 30 m/s de R, ¿quina freqüència sent el receptor?

