Teoría de Errores

Javier Cervera, Marcel Aguilella

1. Introducción: definición de error

La palabra "error" referida al ámbito experimental no tiene el sentido habitual de fallo o equivocación. El concepto de error experimental está relacionado con la incertidumbre que inevitablemente surge al realizar una medida en el laboratorio. Supongamos por ejemplo que hemos medido la altura de una puerta. La forma aceptada de expresar la altura medida es

$$h = 209{,}8 \pm 0{,}2 \text{ cm}$$

donde se ha indicado el nombre de la magnitud medida (h), la mejor estimación de la medida (209,8 cm) y de su error (0,2 cm), y las unidades en que se ha realizado la medida (cm). El error nos dice el *intervalo* en que la medida real se encuentra. En este caso indicamos que la mejor *estimación* que hemos obtenido de la altura es 209,8 cm y que el valor se encuentra en el intervalo comprendido entre 209,6 cm y 210,0 cm.

En el ámbito científico los errores son muy importantes para poder discriminar entre diferentes teorías. En ingeniería su importancia está relacionada con el control de calidad y la seguridad. En cada caso se necesita estimar cuál es el margen de error para obtener la calidad exigida sin incurrir en excesivos costes.

2. Tipos de errores

Los errores pueden clasificarse según su origen en:

- *sistemáticos*
  - Aparato de medida defectuoso o método inadecuado (evitables)
  - Precisión del instrumento de medida o del método (inevitables)
- *aleatorios*
  - Habilidad del experimentador
  - Procesos no controlables en el experimento

Por otro lado, si atendemos a la forma de expresar el error, los errores se dividen en:

- *absolutos*: valor absoluto del margen de error (con las dimensiones de la medida)
- *relativos*: porcentaje de la mejor estimación (adimensional)

En el ejemplo anteriormente comentado de la altura de la puerta, el error absoluto sería

$$\varepsilon_{\text{abs}} = 0{,}2 \text{ cm}$$

mientras que el error relativo sería

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \left|\frac{\varepsilon_{\text{abs}}}{h}\right| \times 100 = \frac{0{,}2}{209{,}8} \times 100 = 0{,}10\,\%$$

3. Cómo escribir las medidas experimentales

Supongamos que disponemos de la medida experimental

$$x = 21{,}6534 \pm 0{,}3238 \text{ m}$$

Para escribirla de forma correcta primero evaluamos el error:

$$\varepsilon_x = 0{,}3238 \text{ m}$$

- Nos fijamos en la primera cifra distinta de cero

$$\varepsilon_x = 0{,}3238 \text{ m}$$

  y en la cifra posterior

$$\varepsilon_x = 0{,}3238 \text{ m}$$

- Aplicamos las reglas de redondeo a la primera cifra distinta de cero:
  - cifra posterior $\leq 4 \rightarrow$ primera cifra se mantiene: $3 \rightarrow 3$
  - cifra posterior $> 4 \rightarrow$ primera cifra aumenta en una unidad: $3 \rightarrow 4$
- Tomamos únicamente la primera cifra como estimación del error

$$\varepsilon_x = 0{,}3238 \rightarrow 0{,}3 \text{ m}$$

- **Excepciones**
  - La primera cifra distinta de cero es un "1":
    - Se toman dos cifras y se aplica el redondeo sobre la segunda

$$0{,}143 \text{ m} \rightarrow 0{,}14 \text{ m}$$
$$0{,}148 \text{ m} \rightarrow 0{,}15 \text{ m}$$

- La primera cifra distinta de cero es un "2":
  - cifra posterior ≤ 4: se toman dos cifras

$$0{,}241 \rightarrow 0{,}24 \text{ m}$$

  - cifra posterior > 4: se toma una cifra (se redondea a 3)

$$0{,}250 \rightarrow 0{,}3 \text{ m}$$

Una vez tenemos el error correctamente expresado nos fijamos en el valor de la variable

$$x = 21{,}6534 \text{ m}$$

La cifra que coincide con la posición del error es la última que debemos poner (aplicando las reglas de redondeo)

$$\varepsilon_x = 0{,}3 \text{ m} \qquad x = 21{,}6534 \rightarrow 21{,}7 \text{ m}$$

El error determina las *cifras significativas* de la medida. No tiene sentido poner el resto de cifras posteriores a la posición del error. La medida se halla en el intervalo entre entre 21,4 m y 22,0 m: las cifras posteriores carecen de significación.

El valor correctamente expresado de la medida es finalmente

$$x = 21{,}7 \pm 0{,}3 \text{ m}$$

Para expresar correctamente los valores de las medidas siempre debemos seguir este orden: primero expresamos correctamente el error y luego la medida con las cifras significativas que nos marca el error.

Algunos ejemplos:

$$\alpha = (10{,}316 \pm 0{,}351)^\circ \rightarrow \alpha = (10{,}3 \pm 0{,}4)^\circ$$
$$t = 31{,}98 \pm 0{,}26 \text{ s} \rightarrow t = 32{,}0 \pm 0{,}3 \text{ s}$$
$$a = 0{,}00963 \pm 8{,}2 \times 10^{-4} \text{ m} \rightarrow a = (9{,}6 \pm 0{,}8) \times 10^{-3} \text{ m}$$
$$b = 7341{,}2 \pm 95{,}34 \text{ m} \rightarrow b = 7340 \pm 100 \text{ m}$$

4. Cálculo de errores

Hemos visto cómo se escriben correctamente las medidas con su margen de error aplicando las reglas de redondeo. En esta sección veremos cómo se calculan los errores.

4.1. Medidas directas

Las medidas directas son aquellas que se leen directamente de los instrumentos de medida. Las que se *miden* en el laboratorio. Los instrumentos de medida tienen dos tipos de escalas: analógicas y digitales. Las escalas analógicas están divididas en intervalos que nos dan el margen de error. Por ejemplo, si tenemos un metro cuyas menores divisiones son en milímetros, el error de la medida directa es $\varepsilon = 1$ mm.[1] En las escalas digitales el fabricante del instrumento nos indica en las especificaciones cuál es el margen de error. Por ejemplo, para el polímetro Promax® utilizado en una de las prácticas de laboratorio, las especificaciones del fabricante para la medida de la resistencia son:

Escala	**Resolución**	**Precisión**
320 Ω	100 mΩ	±(2,0 % lect. + 3 dig.)
3,2 kΩ	1 Ω	
32 kΩ	10 Ω	±(1,5 % lect. + 3 dig.)
320 kΩ	100 Ω	
3,2 MΩ	1 kΩ	±(2,5 % lect. + 3 dig.)
30 MΩ	10 kΩ	±(5 % lect. + 5 dig.)

Si por ejemplo la pantalla del polímetro nos indica $R = 47{,}37$ kΩ, eso supone que estamos en la escala de 320 kΩ. El error en este caso viene dado por

$$\varepsilon = \frac{1{,}5}{100} \times 47{,}37 + 3 \times 0{,}1 = 1{,}01 \text{ k}\Omega = 1{,}0 \text{ k}\Omega$$

[1] Nótese que en este caso a pesar de ser un "1" sólo tomamos una cifra significativa y no dos.

es decir, el 1,5 % de la medida indicada en pantalla + 3 veces la resolución (nótese el cambio de unidades de la resolución para que coincidan con las de la medida). En la expresión del error se han destacados los parámetros obtenidos de la tabla anterior (escala de 320 kΩ). El valor de la resistencia sería finalmente

$$R = 47{,}4 \pm 1{,}0 \text{ k}\Omega$$

4.1.1. Error de N medidas

Los errores aleatorios disminuyen como $1/\sqrt{N}$, donde N es el número de medidas. Con el fin de minimizar su efecto, en general se realizan $N > 1$ medidas de un mismo parámetro (por ejemplo el tiempo que tarda en caer un objeto desde una determinada altura). Esto además nos permite estimar este tipo de errores.

Consideremos que hemos medido N veces el valor de un parámetro obteniendo los valores $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, N$, con sus respectivos errores $\varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, N$. En estas condiciones, la mejor estimación de la medida del parámetro x es el valor medio de los N valores medidos

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Para la estimación del error consideramos por un lado el valor medio de los errores de las N medidas

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\varepsilon_i|$$

donde se ha considerado el valor absoluto para evitar la cancelación de errores. Por otro lado calculamos la denominada desviación atípica de la muestra

$$\sigma_{N-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Con este valor podemos calcular el error estándar de la media

$$\varepsilon(\bar{x}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$$

Para el error de la medida se escoge el mayor de $\bar{\varepsilon}(x)$ y $\varepsilon(\bar{x})$

$$\varepsilon(x) = \text{Máx}\{\bar{\varepsilon}(x), \varepsilon(\bar{x})\}$$

El valor medio de los errores $[\bar{\varepsilon}(x)]$ refleja el error sistemático en la medida (el error del instrumento de medida). Por su parte, el error estándar de la media $[\varepsilon(\bar{x})]$ proporciona una estimación del error aleatorio. Al tomar el mayor de ambos errores nos aseguramos de tener los dos tipos de errores en cuenta.

Ejemplo Supongamos que hemos medido el tiempo que tarda en caer un objeto desde una altura prefijada con un cronómetro que aprecia hasta centésimas de segundo. Repitiendo la medida tres veces hemos obtenido

i	t ($\pm$0,01 s)
1	20,34
2	20,12
3	19,93

La mejor estimación del tiempo que tarda en caer nos la da el valor medio

$$\bar{t} = \frac{1}{3}(20{,}34 + 20{,}12 + 19{,}93) = 20{,}13 \text{ s}$$

El valor medio de los errores es obviamente

$$\bar{\varepsilon}(t) = \frac{1}{3}(0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01) = 0{,}01 \text{ s}$$

es decir, la precisión del cronómetro. Por su parte, la desviación atípica es

$$\sigma_2(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(20{,}34 - 20{,}13)^2 + (20{,}12 - 20{,}13)^2 + (19{,}93 - 20{,}13)^2\right]} = 0{,}205 \text{ s}$$

y el error estándar de la media

$$\varepsilon(\bar{t}) = \frac{2 \times 0{,}205}{\sqrt{3}} = 0{,}237 \rightarrow 0{,}24 \text{ s}$$

El error de la medida es finalmente

$$\varepsilon(t) = \text{Máx}\{\bar{\varepsilon}(t), \varepsilon(\bar{t})\} = 0{,}24 \text{ s}$$

con lo que el valor de la medida resulta

$$t = 20{,}13 \pm 0{,}24 \text{ s}$$

5. Errores indirectos. Propagación de errores

En la sección anterior se ha mostrado cómo estimar los errores de las medidas directas; de aquellas magnitudes que físicamente se miden en el laboratorio. En esta sección explicamos cómo estimar los errores de aquellas magnitudes que no se miden directamente sino que se *calculan*.

Supongamos el caso que queremos conocer el área de un objeto rectangular. A tal efecto medimos la longitud de la base y la altura

$$\begin{aligned} b &= 5{,}3 \pm 0{,}1 \text{ cm} \\ h &= 0{,}54 \pm 0{,}05 \text{ cm} \end{aligned}$$

El valor del área A se obtiene multiplicando ambos términos

$$A = bh = 2{,}862 \text{ cm}^2$$

Para estimar el error del área recurrimos a la teoría de errores indirectos.

Sea una función f que depende de N variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ con sus errores $\{\varepsilon(x_1), \varepsilon(x_2), \ldots, \varepsilon(x_N)\}$. El error de $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ está determinado por la expresión

$$\varepsilon(f) = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon(x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon(x_2)\right]^2 + \ldots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_N}\varepsilon(x_N)\right]^2}$$

donde $\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \ldots, \partial f/\partial x_N$, son las *derivadas parciales* de f respecto de las variables x_1, x_2, …, x_N, respectivamente. La derivada parcial de la función f respecto de una de las variables de las que depende x_i se calcula como una derivada ordinaria suponiendo que el resto de variables $x_{j\neq i}$ son constantes.

En nuestro ejemplo, el error del área viene dado por la expresión

$$\varepsilon(A) = \sqrt{\left[\frac{\partial A}{\partial b}\varepsilon(b)\right]^2 + \left[\frac{\partial A}{\partial h}\varepsilon(h)\right]^2}$$

donde $\partial A/\partial b$ y $\partial A/\partial h$ son las derivadas parciales de A respecto de b y h, respectivamente. El cálculo de $\partial A/\partial b$ implica que la variable h se mantiene constante y se deriva A respecto de b

$$\left.\begin{array}{c} h = \text{constante} \\ b \to x \\ A \to f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = hx \Rightarrow f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = h \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial b} = h$$

Análogamente, en el cálculo de $\partial A/\partial h$ la variable b se mantiene constante y se deriva con respecto a h

$$\left.\begin{array}{c} b = \text{constante} \\ h \to x \\ A \to f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = bx \Rightarrow f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = b \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial h} = b$$

El error del área es por tanto

$$\begin{aligned} \varepsilon(A) &= \sqrt{[h\varepsilon(b)]^2 + [b\varepsilon(h)]^2} = \sqrt{[0{,}54 \times 0{,}1]^2 + [5{,}3 \times 0{,}05]^2} \\ &= 0{,}27 \to 0{,}3 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

con lo que el valor del área es

$$A = 2{,}9 \pm 0{,}3 \text{ cm}^2$$

6. Ajuste por mínimos cuadrados

Hasta este momento nos hemos fijado únicamente en la medida de una misma cantidad hasta un número N de veces (sección 4.1.1). Sin embargo es muy común realizar una serie de medidas de dos magnitudes para investigar su relación matemática.

Ejemplo La Ley de Ohm indica que para objetos fabricados con ciertos materiales (llamados ómhicos) la diferencia de potencial eléctrico V que existe en sus extremos es proporcional a la intensidad de corriente I que circula por ellos

$$V = RI, \;\; R = \text{constante}$$

donde R es la resistencia del objeto.

Con el fin de obtener la resistencia de un objeto problema, le aplicamos una intensidad de corriente $I = 25 \pm 1$ mA y medimos la diferencia de potencial entre sus extremos, obteniendo los valores

V (mV)
150 ± 2
149 ± 3
$152{,}1 \pm 1{,}5$
151 ± 4

Siguiendo la teoría de errores de la sección 4.1.1 obtenemos la mejor estimación de la diferencia de potencial medida con su error

$$\left.\begin{array}{r} \bar{V} = 150{,}5 \text{ mV} \\ \bar{\varepsilon}(V) = 3 \text{ mV} \\ \varepsilon(\bar{V}) = 1{,}3 \text{ mV} \end{array}\right\} \Rightarrow V = 151 \pm 3 \text{ mV}$$

A partir de este resultado podemos obtener el valor de R

$$R = \frac{V}{I} = \frac{151}{25} = 6{,}04\ \Omega$$

y su error por medio de la teoría de errores indirectos (sección 5)

$$\begin{aligned} \varepsilon(R) &= \sqrt{\left[\frac{\partial R}{\partial V}\varepsilon(V)\right]^2 + \left[\frac{\partial R}{\partial I}\varepsilon(I)\right]^2} = 0{,}27 \to 0{,}3\ \Omega \\ \frac{\partial R}{\partial V} &= \frac{1}{I} = 0{,}04 \text{ mA}^{-1} \\ \frac{\partial R}{\partial I} &= -\frac{V}{I^2} = 0{,}24 \text{ mV} \cdot \text{mA}^{-2} \end{aligned}$$

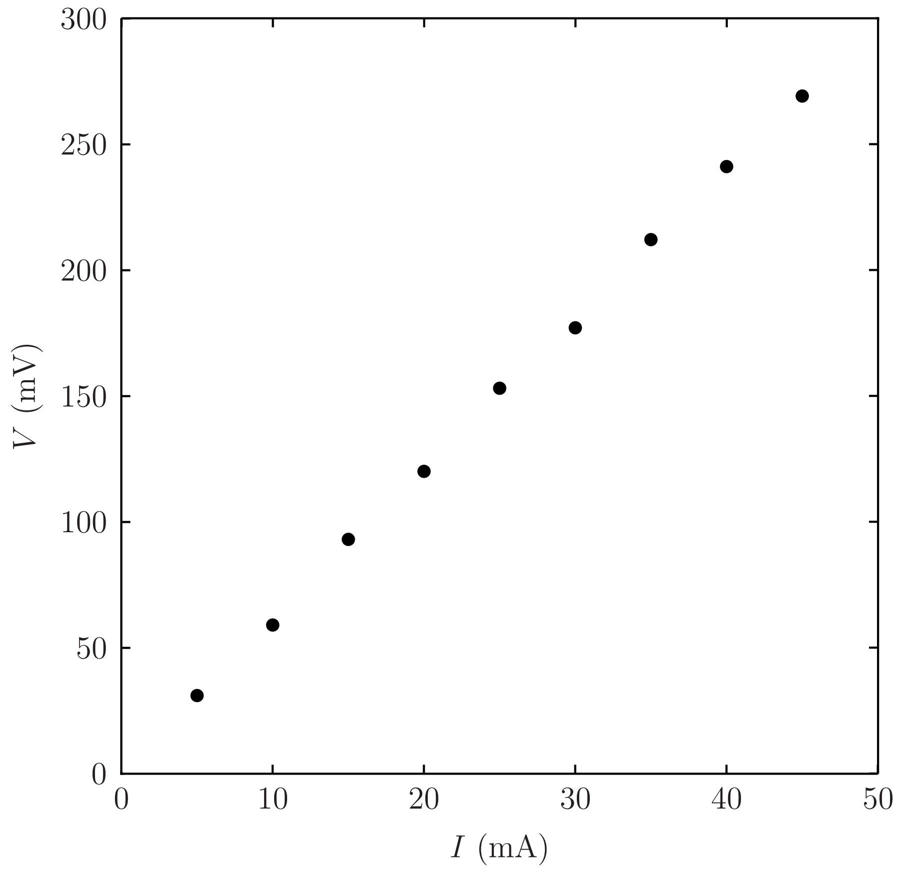
Finalmente obtenemos

$$R = 6{,}0 \pm 0{,}3\ \Omega$$

De esta forma hemos obtenido una estimación del valor de la resistencia R. Sin embargo no hemos estudiado la relación entre V e I que nos indica la Ley de Ohm. No hemos estudiado si esa relación es o no lineal. Si por ejemplo aumentamos la intensidad de corriente aplicada al doble, *¿aumentará la diferencia de potencial también al doble?*

Para estudiar la relación funcional entre V e I realizamos una serie de medidas de V para diferentes valores de I

I (± 1 mA)	V (mV)
5	31 ± 2
10	59 ± 3
15	93 ± 2
20	120 ± 2
25	153 ± 2
30	177 ± 4
35	212 ± 3
40	241 ± 3
45	269 ± 3



La representación gráfica de los valores nos indica que los puntos se distribuyen de forma aproximadamente lineal. Sin embargo la gráfica nos da únicamente información *cualitativa* sobre la relación entre V e I. Con el fin de *cuantificar* hasta qué punto los valores experimentales pueden describirse mediante una recta utilizamos el método de cálculo conocido como *ajuste lineal*, o *ajuste por mínimos cuadrados*.

El ajuste por mínimos cuadrados parte de una serie de N datos experimentales $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ y $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ para los que se presupone una relación lineal

$$y = Ax + B; \;\; A, B \text{ constantes}$$

donde A y B son los denominados parámetros de ajuste. El parámetro A es la *pendiente* de la recta, mientras que B es la denominada *ordenada en el origen*, el punto de corte de la recta con el eje OY. El método permite obtener los valores de A y B que mejor describen la serie *completa* de datos. Las ecuaciones que dan los valores de A y B son

$$\begin{aligned} A &= \frac{NS_{xy} - S_y S_x}{NS_{xx} - S_x^2} \\ B &= \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{NS_{xx} - S_x^2} \end{aligned}$$

donde se han definido las variables

$$\begin{aligned} S_x &\equiv \sum_{i=1}^{N} x_i \\ S_y &\equiv \sum_{i=1}^{N} y_i \\ S_{xx} &\equiv \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \\ S_{xy} &\equiv \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{aligned}$$

Aparte de los valores de A y B el método proporciona el denominado *coeficiente de correlación* r

$$r = \frac{NS_{xy} - S_y S_x}{\sqrt{(NS_{xx} - S_x^2)(NS_{yy} - S_y^2)}}$$

donde

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{N} y_i^2$$

El coeficiente de correlación indica hasta qué punto los puntos pueden describirse mediante una recta. Su valor cumple que $|r| \leq 1$. Los valores experimentales están tanto mejor alineados cuanto más próximo es el valor de $|r|$ a la unidad.

El método del ajuste por mínimos cuadrados proporciona también una estimación de los errores de los parámetros de ajuste. Para ello utiliza la *desviación estándar de la recta*

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} [y_i - (A + Bx_i)]^2$$

Este valor compara el valor experimental (y_i) con el valor predicho por el ajuste $(A + Bx_i)$ para los N puntos experimentales. Cuanto más próximo es σ_y^2 a cero, mejor es el ajuste. Los errores de A y B se obtiene a partir de las expresiones

$$\begin{aligned} \varepsilon(A) &= \sqrt{\frac{N\sigma_y^2}{NS_{xx} - S_x^2}} \\ \varepsilon(B) &= \sqrt{\frac{S_{xx}\sigma_y^2}{NS_{xx} - S_x^2}} \end{aligned}$$

En el ejemplo que estamos utilizando podemos comparar la expresión de la Ley de Ohm

$$V = RI$$

con la expresión de la relación lineal

$$y = Ax + B$$

Si identificamos V con y e I con x, observamos que, al realizar el ajuste por mínimos cuadrados, la pendiente A del ajuste nos dará la resistencia R del objeto y que la ordenada en el origen B debe ser cero. Calculamos por tanto los valores de A y B que mejor ajustan los puntos experimentales. Estos cálculos pueden realizarse fácilmente utilizando una hoja de cálculo (véase la sección 6.1).

$x(\equiv V)$	$y(\equiv I)$	x^2	xy	y^2
5	31	25	155	961
10	59	100	590	3481
15	93	225	1395	8649
20	120	400	2400	14400
25	153	625	3825	23409
30	177	900	5310	31329
35	212	1225	7420	44944
40	241	1600	9640	58081
45	269	2025	12105	72361
S_x	S_y	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}
225	1355	7125	42840	257615

$$\begin{aligned}
A &= \frac{NS_{xy} - S_y S_x}{NS_{xx} - S_x^2} = 5{,}9766 \\
B &= \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{NS_{xx} - S_x^2} = 1{,}1388 \\
r &= \frac{NS_{xy} - S_y S_x}{\sqrt{(NS_{xx} - S_x^2)(NS_{yy} - S_y^2)}} = 0{,}99970
\end{aligned}$$

y sus errores

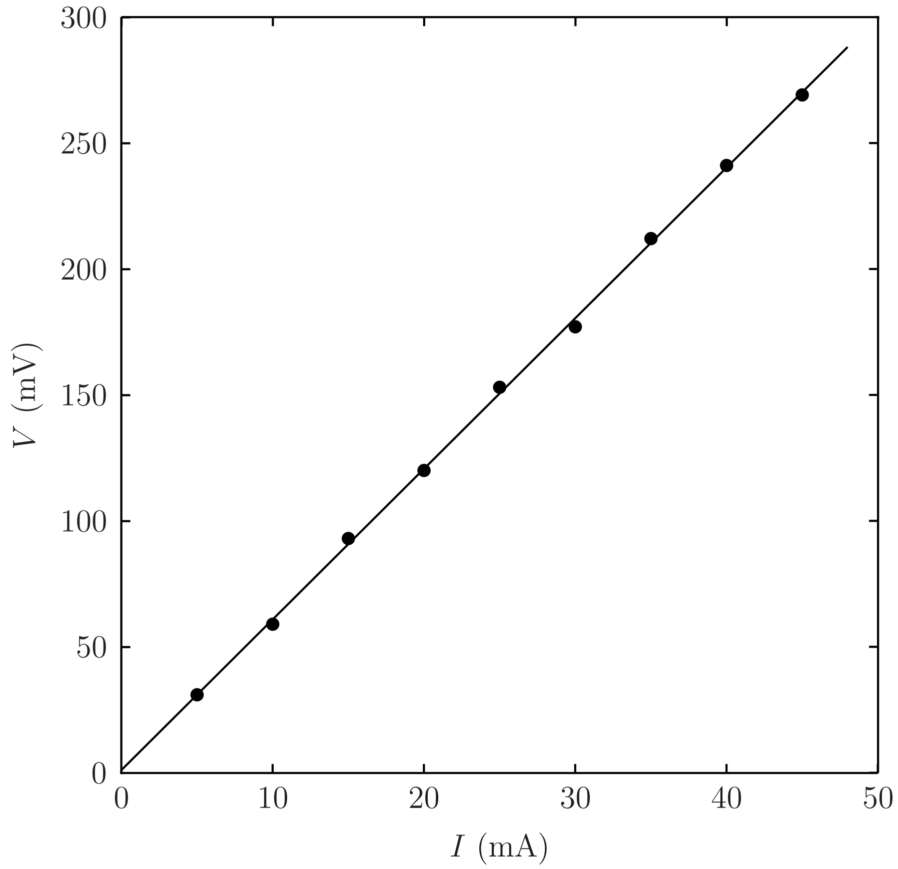
x	y	$Ax + B$
5	31	31
10	59	61
15	93	91
20	120	121
25	153	151
30	177	180
35	212	210
40	241	240
45	269	270

$$
\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-(A+Bx_i)\right]^2 = 4{,}4865 \\
\varepsilon(A) &= \sqrt{\frac{N\sigma_y^2}{NS_{xx}-S_x^2}} = 0{,}055 \rightarrow 0{,}06 \\
\varepsilon(B) &= \sqrt{\frac{S_{xx}\sigma_y^2}{NS_{xx}-S_x^2}} = 1{,}54 \rightarrow 1{,}5
\end{aligned}
$$

Finalmente tenemos (aplicando las reglas de la sección 3)

$$
\begin{aligned}
A &= 5{,}98 \pm 0{,}06\ \Omega \\
B &= 1{,}1 \pm 1{,}5\ \mathrm{mV}
\end{aligned}
$$

Gráficamente podemos comparar los valores experimentales (puntos) con la predicción que da el ajuste (línea continua).



Con el ajuste podemos comprobar si el material del objeto problema sigue la Ley de Ohm. Por un lado el coeficiente de correlación $r = 0{,}99970$ es muy próximo a uno, lo que indica que los valores experimentales se describen bien por medio de una relación lineal. Por otro, el valor estimado de la ordenada en el origen es $B = 1{,}1 \pm 1{,}5$ mA. Por tanto B es cero dentro del *margen de error*, tal y como predice la Ley de Ohm.

Una vez hemos comprobado que se cumple la Ley de Ohm en el material, la pendiente A nos da la mejor estimación de la resistencia R para la serie *completa* de valores experimentales

$$R = 5{,}98 \pm 0{,}06\ \Omega$$

6.1. Sobre el uso de programas informáticos

Únicamente es necesario hacer uno o dos ajustes por mínimos cuadrados para darse cuenta de que se trata de un cálculo repetitivo en el que resulta muy fácil equivocarse. Por esta razón siempre conviene representar la recta obtenida junto con los valores experimentales. No sólo nos indica de forma visual cómo es el ajuste sino que, además, puede ayudarnos a comprobar si nos hemos equivocado.

Para evitar fallos en el cálculo del ajuste por mínimos cuadrados es recomendable utilizar un ordenador para realizar los cálculos si existe esa posibilidad. Las hojas de cálculo pueden ayudarnos a generar las tablas para calcular los valores de S_x, S_y, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy} y σ_y^2. De hecho se utilizó una en el ajuste del ejemplo mostrado en este documento. Se puede llegar incluso un paso más allá y utilizar las funciones especializadas que tanto las hojas de cálculo como los los programas de representación gráfica tienen. En cualquier caso conviene aclarar que es necesario un aprendizaje previo para saber manejar el programa informático y que el uso del ordenador *disminuye pero no elimina* la posibilidad de cometer fallos.

Seguidamente se comenta cómo utilizar las funciones especiales de dos hojas de cálculo para realizar los ajustes por mínimos cuadrados.

6.1.1. Hoja de cálculo de OpenOffice

El paquete informático OpenOffice tiene similares características del paquete más conocido Microsoft® Office®. Puede obtenerse de forma gratuita de la página web `http://www.openoffice.es/`.

El documento `ajuste.sxc` muestra un ejemplo del uso de las funciones especializadas para realizar un ajuste por mínimos cuadrados utilizando la hoja de cálculo de OpenOffice. Asímismo muestra la gráfica con los puntos experimentales y el ajuste. El documento puede usarse directamente cambiando los datos experimentales pero debe *adaptarse el rango* utilizado por las funciones y la gráfica a los nuevos datos. Una vez realizados los cambios, la gráfica puede copiarse y pegarse directamente en el documento con que se esté trabajando.

La función especializada que realiza el ajuste por mínimos cuadrados en la hoja de cálculo de OpenOffice es `LINEST`. El uso de esta función se muestra en el documento `ajuste.sxc`. Pasamos a describir brevemente sus características.

La función `LINEST` está definida en el programa como

```
LINEST(datos y; datos x; tipo; estadística)
```

donde los argumentos de la función deben ser

`datos y`	valores de y
`datos x`	valores de x
`tipo`	1
`estadística`	1

Al escoger `tipo=1` y `estadística=1`, nos aseguramos de que calcule correctamente el ajuste por mínimos cuadrados y nos dé los valores de los errores de la pendiente y la ordenada en el origen, así como el valor del coeficiente de correlación. En principio la función `LINEST` devuelve una matriz de dos columnas y tres filas con el resultado del ajuste. Sin embargo resulta más útil indicarle qué valor de la matriz queremos en cada caso. Esto es lo que se ha hecho en el documento mediante la función

`INDEX(matriz; columna; fila)`

donde se ha introducido por `matriz` el resultado del ajuste

`INDEX(LINEST(datos y; datos x; 1; 1); columna; fila)`

Así, en el caso de `columna=1` y `fila=1`, esta función nos da el valor de la pendiente del ajuste por mínimos cuadrados de los datos representados por `datos y` y `datos x`. Resumiendo, los resultados del ajuste vienen dados por

Pendiente	`INDEX(LINEST(datos y; datos x; 1; 1); 1; 1)`
Error Pendiente	`INDEX(LINEST(datos y; datos x; 1; 1); 2; 1)`
Interesección eje OY	`INDEX(LINEST(datos y; datos x; 1; 1); 1; 2)`
Error Int. eje OY	`INDEX(LINEST(datos y; datos x; 1; 1); 2; 2)`
r^2	`INDEX(LINEST(datos y; datos x; 1; 1); 3; 1)`

6.1.2. Hoja de cálculo Microsoft® Excel®

El documento `ajuste.xls` muestra un ejemplo del uso de las funciones especializadas para realizar un ajuste lineal con la hoja de cálculo Microsoft® Excel®. Asímismo muestra la gráfica con los puntos experimentales y el ajuste. El documento puede usarse directamente cambiando los datos experimentales pero debe *adaptarse el rango* utilizado por las funciones y la gráfica a los nuevos datos. Una vez realizados los cambios, la gráfica puede copiarse y pegarse directamente en el documento con que se esté trabajando.

La función especializada que realiza el ajuste por mínimos cuadrados en la hoja de cálculo Microsoft® Excel® es `ESTIMACION.LINEAL` (programa en castellano). El uso de esta función se muestra en el documento `ajuste.xls`. Pasamos a describir brevemente sus características.

La función `ESTIMACION.LINEAL` está definida en el programa como

`ESTIMACION.LINEAL(datos y; datos x; tipo; estadística)`

donde los argumentos de la función deben ser

`datos y`	valores de y
`datos x`	valores de x
`tipo`	`VERDADERO`
`estadística`	`VERDADERO`

Al escoger `tipo=VERDADERO` y `estadística=VERDADERO`, nos aseguramos de que calcule correctamente el ajuste y nos dé los valores de los errores de la pendiente y la ordenada en el origen, así como el valor del coeficiente de correlación. En el programa Excel, dejar el `tipo` en blanco equivale a asignarle el valor `VERDADERO`. Por esta razón para calcular el ajuste utilizamos

```
ESTIMACION.LINEAL(datos y; datos x; ; VERDADERO)
```

lo que nos permite simplificar la notación.

La función `ESTIMACION.LINEAL` devuelve una matriz de dos columnas y tres filas con el resultado del ajuste. Sin embargo resulta más útil indicarle qué valor de la matriz queremos en cada caso. Esto es lo que se ha hecho en el documento mediante la función (versión en castellano)

```
INDICE(matriz; fila; columna)
```

donde se ha introducido por `matriz` el resultado del ajuste

```
INDICE(ESTIMACION.LINEAL(datos y; datos x; ; VERDADERO); fila;
columna)
```

Así, en el caso de `fila=1` y `columna=1`, esta función nos da el valor de la pendiente del ajuste por mínimos cuadrados de los datos representados por `datos y` y `datos x`. Resumiendo, los resultados del ajuste vienen dados por

Pendiente:

`INDICE(ESTIMACION.LINEAL(datos y; datos x; ; VERDADERO); 1; 1)`

Error Pendiente:

`INDICE(ESTIMACION.LINEAL(datos y; datos x; ; VERDADERO); 2; 1)`

Interesección eje OY:

`INDICE(ESTIMACION.LINEAL(datos y; datos x; ; VERDADERO); 1; 2)`

Error Int. eje OY:

`INDICE(ESTIMACION.LINEAL(datos y; datos x; ; VERDADERO); 2; 2)`

r^2:

`INDICE(ESTIMACION.LINEAL(datos y; datos x; ; VERDADERO); 3; 1)`

Problemas

1. Exprese correctamente, con todas sus cifras significativas, las cantidades siguientes:

   a) $17{,}923 \pm 1{,}691$

   b) $0{,}00005432 \pm 3{,}68 \times 10^{-6}$

   c) $9789{,}8 \pm 10{,}9$

   d) $3{,}3923 \pm 0{,}2501$

   e) $(22{,}34 \times 10^{-6}) \pm (5{,}49 \times 10^{-8})$

   f) $999{,}9 \pm 10{,}2$

2. Indique qué error absoluto y qué error relativo se comete al hacer las aproximaciones

   a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$

   b) $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$

   para $x = 0{,}2$.

3. De las dos medidas siguientes, ¿Cuál tiene más precisión?

   - $L = 1023{,}2 \pm 0{,}2$ cm
   - $T = 0{,}062 \pm 0{,}001$ s

4. Dos magnitudes físicas, x e y, se relacionan por medio de la fórmula $y = 3\ln(1/x)$. Si $x = 32 \pm 2$, ¿Cuál será el valor de y y su error?

5. Obtenga una expresión para el error de z si conocemos el error absoluto de x e y en los siguientes casos.

   a) $z = x - y$

   b) $z = xy$

   c) $z = xy^2$

d) $z = 3x/y$

6. Queremos conocer la caída de tensión en una resistencia de valor $R = 7{,}623 \pm 0{,}012\ \Omega$. La intensidad medida es $I = 2{,}06 \pm 0{,}03$ A. Obtenga V con su error.

7. Para calcular el volumen de un prisma de base cuadrada de lado L y altura H se miden las longitudes L y H con el resultado

   - $L = 2{,}30 \pm 0{,}16$ cm
   - $H = 6{,}21 \pm 0{,}07$ cm

   Conociendo que el volumen del prisma viene dado por $V = L^2 H$, determine el valor de V con su error.

8. Una barra de cobre de longitud $L = 1{,}2$ m y sección $A = 4{,}8 \pm 0{,}1$ cm^2 está aislada para evitar pérdidas de calor a través de su superfície. Los extremos se mantienen a una diferencia de temperatura $\Delta T = 100 \pm 0{,}5$ °C, situando un extremo en una mezcla de hielo y agua y el otro en agua hirviendo y vapor. Si la expresión de la corriente térmica es
$$I = \kappa A \frac{\Delta T}{L}$$
donde κ es la conductividad térmica, que en el caso del cobre tiene el valor $\kappa = 401 \pm 1$ W/mK. Calcule con qué precisión, en centímetros, es necesario medir la longitud de la barra para que el error de la corriente térmica sea como máximo del 25 %.

9. Halle la recta $y = A + Bx$ que mejor ajusta el conjunto de puntos:

x	2,31	4,11	6,35	8,82	10,1	12,6
y	7,35	8,81	10,4	12,3	13,5	14,7

10. Sabemos que dos magnitudes x e y están relacionadas por medio de la relación
$$y = \ln(\alpha + \beta x)$$

donde α y β son dos parámetros desconocidos. Estime sus valores haciendo un ajuste por mínimos cuadrados de las medidas experimentales de x e y que aparecen en la tabla.

x	y
1	2,67
2	3,16
3	3,54
4	3,80
5	3,97

Referencias

[1] G. Garcia Belmonte, J. Bisquert, M. J. Hernández, S. Bal·le, Ll. Mañosa, Introducció a l'experimentació, *Publicacions de la Universitat Jaume I*, Castelló 1999

[2] J. R. Taylor, An introduction to error analysis, *University Science Books*, Sausalito (California) 1997