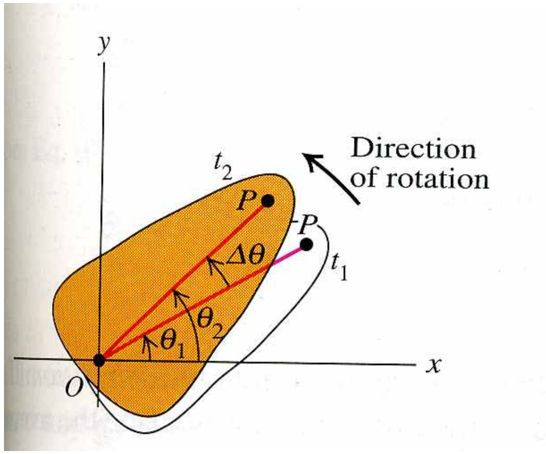
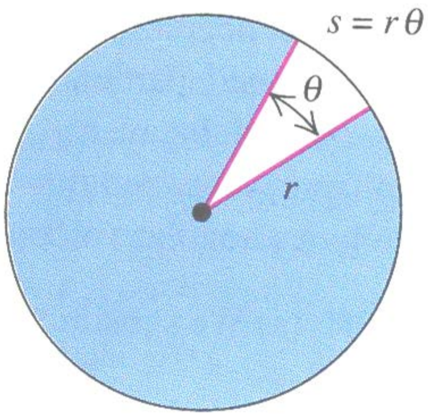
# Física.
# Tema 7.
# Rotació de sòlids rígids

Acceleració angular per a un sòlid rígid. Moment d'inèrcia. Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix. Energia en el moviment rotacional. Rotació i traslació combinades. Treball i potència en el moviment rotacional.

# Moviment circular

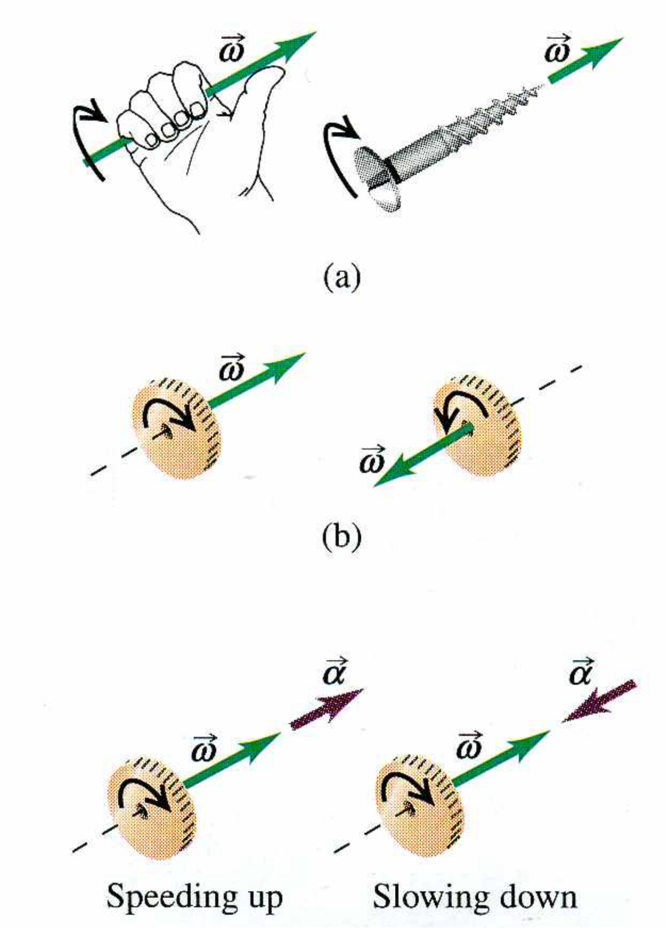



$$s = r\theta$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

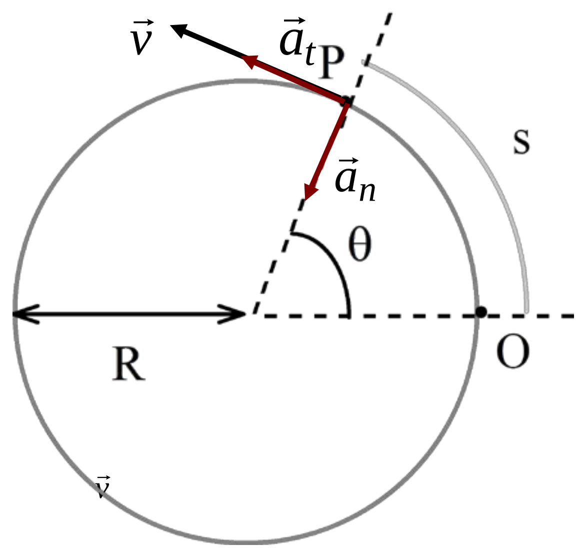
$$\alpha = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$



# Moviment circular

Variables importants en el moviment circular:
$$\begin{cases} \theta \\ \omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ \alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Mov. linial:
$$\begin{cases} x \\ v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$




$$s = R\theta$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

Sols si $\alpha$ és constant s'acomplirà
$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

# Moment d'inèrcia

Moment d'inèrcia

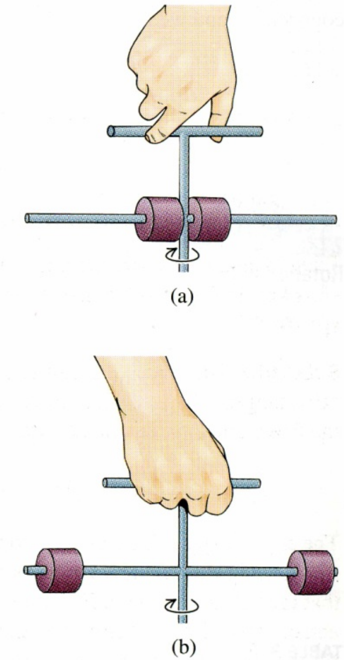
Sistemes formats per objectes discrets

$$I = \sum_i m_i r_i^{\,2}$$

Objectes amb la massa distribuïda

$$I = \int r^2 dm$$

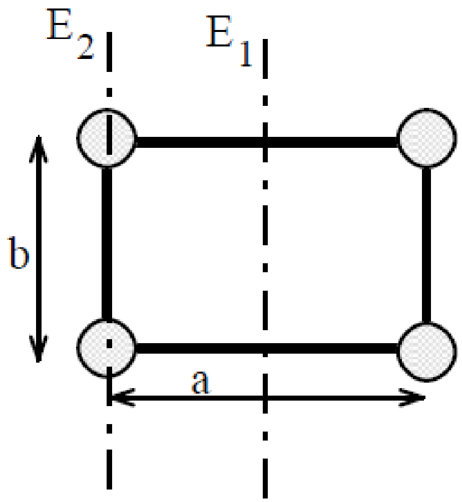
On *r* és ara la distància a l'eix de rotació, **no** el vector de posició respecte a l'origen del sist. ref.




**9–12** An apparatus free to rotate around a vertical axis. The two cylinders of mass *m* can be locked into any position on the horizontal shaft. (a) If the two cylinders are located close to the rotation axis, the moment of inertia is small and it's easy to start the apparatus rotating. (b) If the cylinders are further from the rotation axis, the moment of inertia is greater and it's more difficult to start or stop the rotation.

# Moment d'inèrcia.

Quatre partícules de massa *m*, unides per varetes de massa negligible, formen un rectangle de costats *a* i *b*. Trobeu el moment d'inèrcia respecte dels eixos *E*1 i *E*2 indicats a la figura, i els respectius radis de gir.

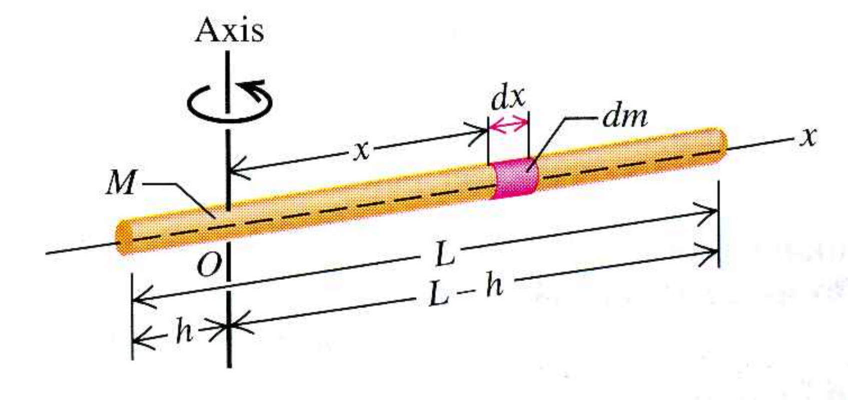


Per a una distribució contínua de massa

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$

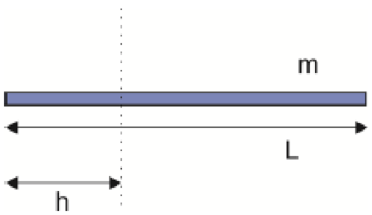
Si la densitat és constant

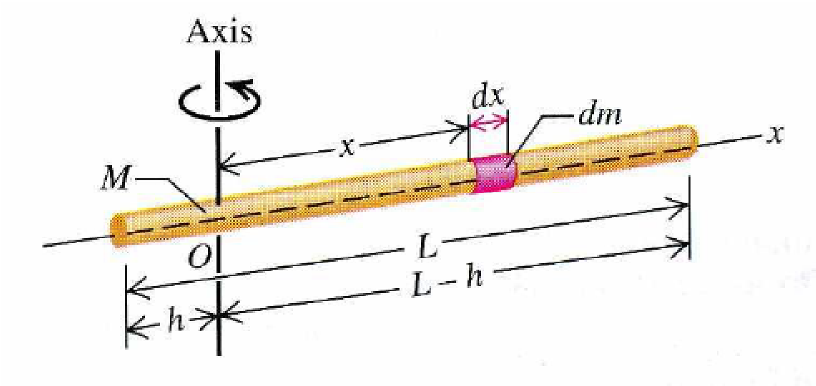
$$I = \rho \int r^2 dV$$



# Moment d'inèrcia.

- Calcula el moment d'inèrcia d'una vareta de massa m i longitud L, al voltant d'un eix perpendicular a distància h de l'extrem.

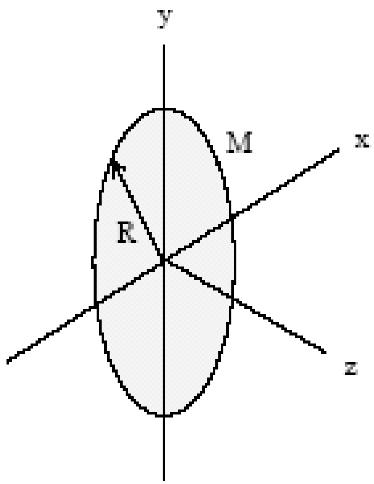


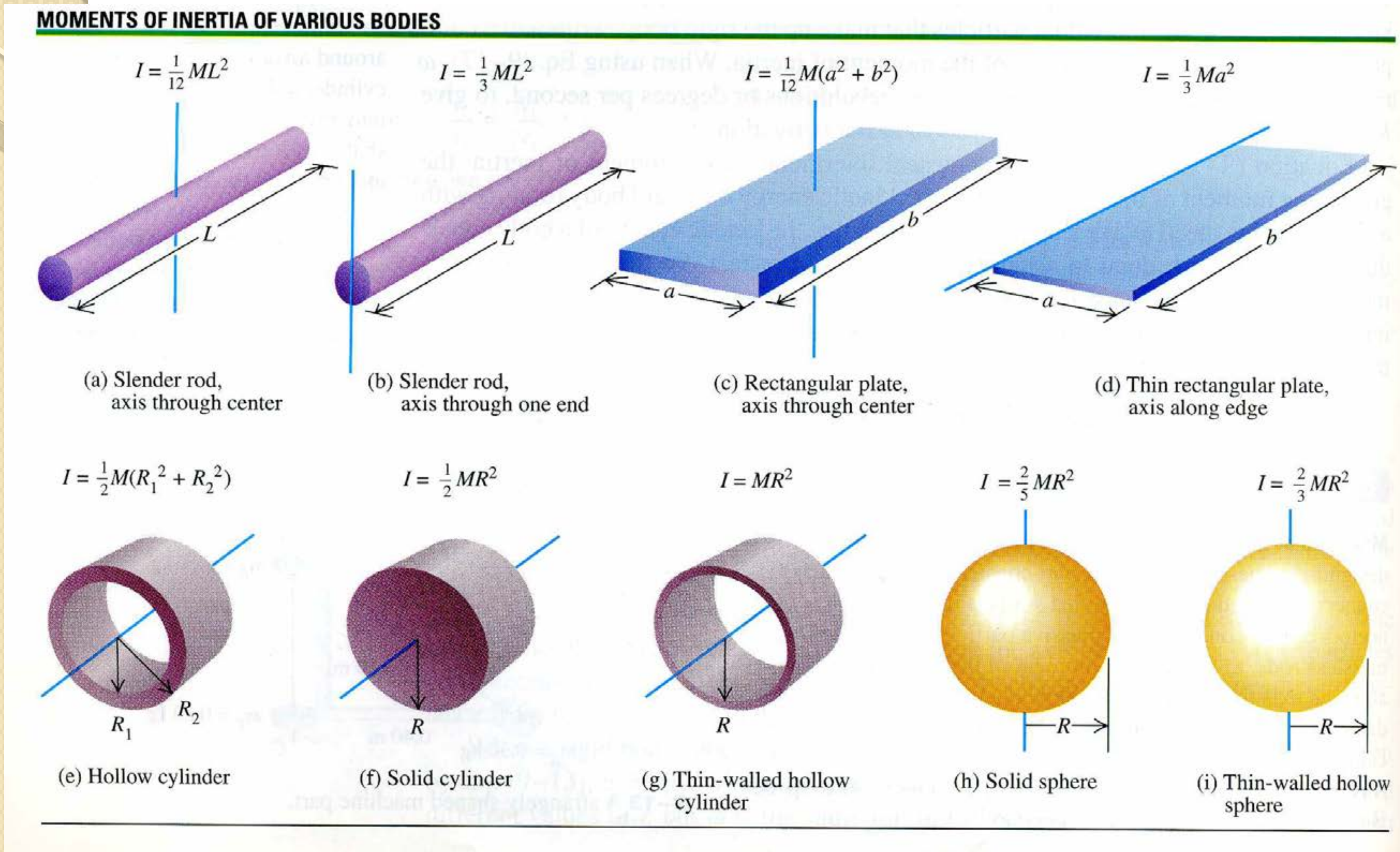
# Moment d'inèrcia.

Trobeu el moment polar d'inèrcia $I_z$ (respecte de l'eix z) d'un disc de massa $M$ i radi $R$.

Sol: $I_z = \frac{1}{2} MR^2$.



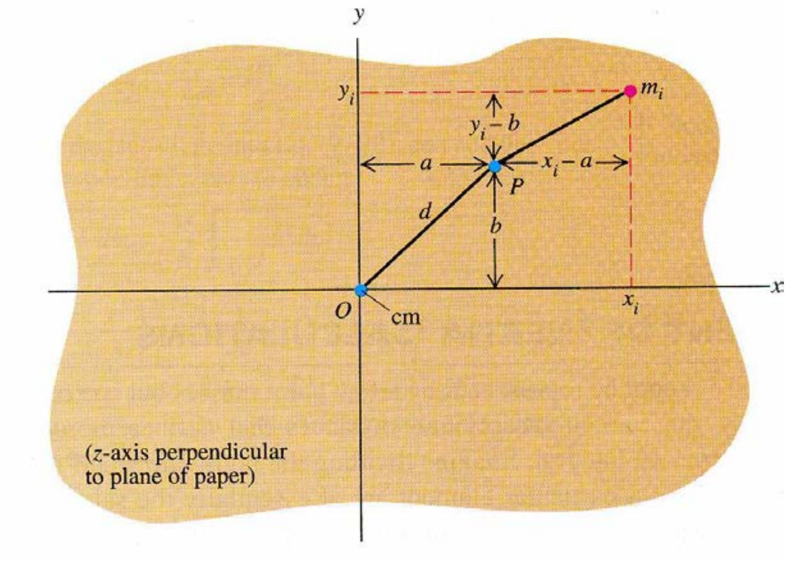
# Moment d'inèrcia



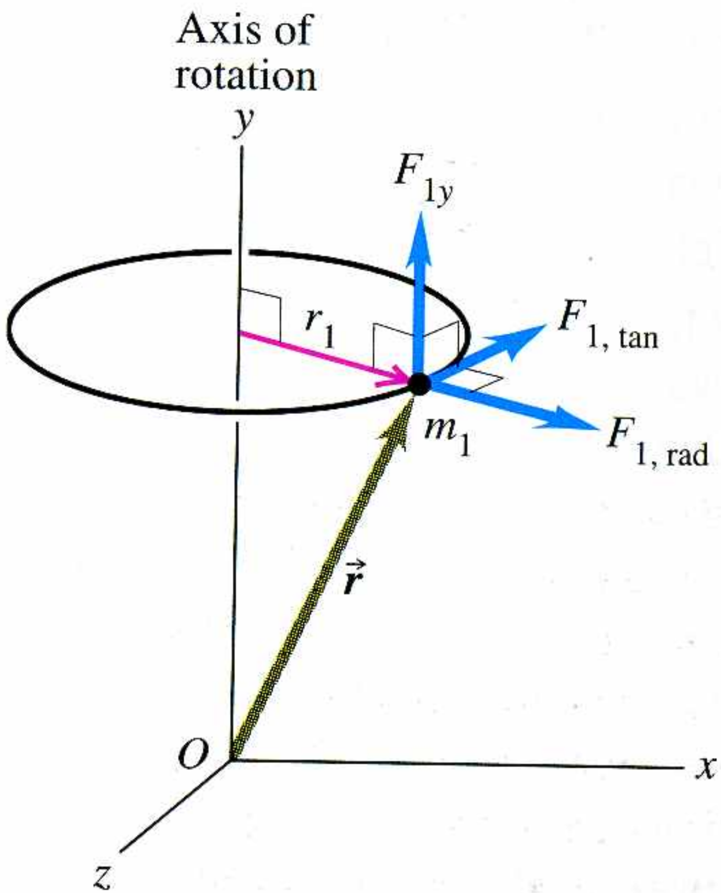
# Moment d'inèrcia.

Teorema dels eixos paral.lels (Steiner)

$$I_P = I_{cm} + Md^2$$



# Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix




Anàleg rotacional de la segona llei de Newton per a un sòlid rígid

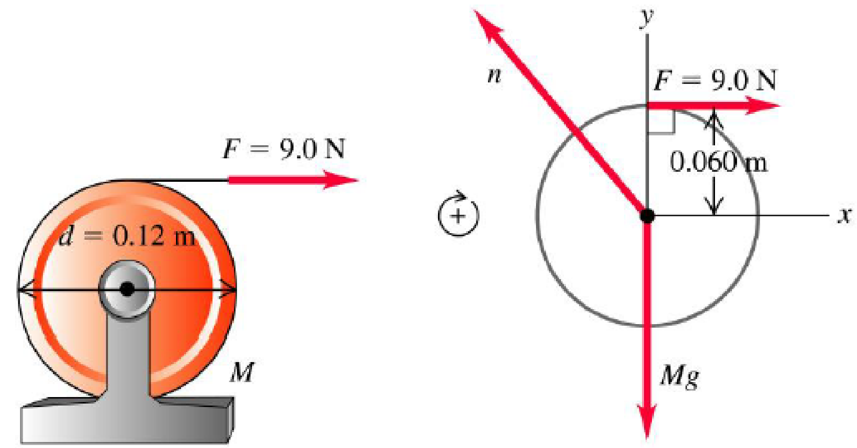
$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Si el moment de forces i l'acceleració angular son paral.les:

$$\sum \tau = I\alpha$$

# Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix

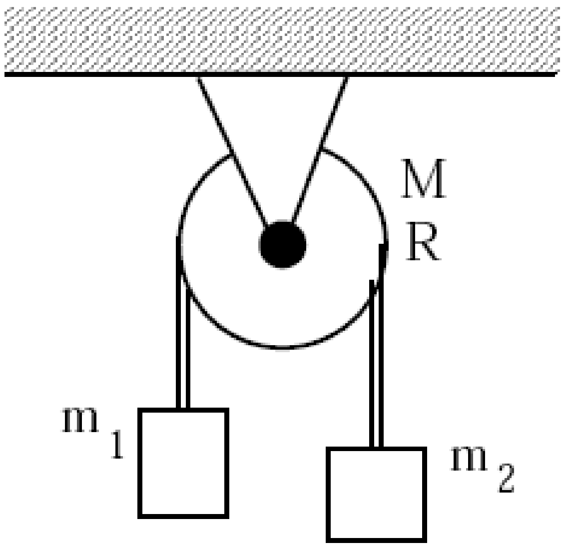
Exemple: cable que es desenrrotlla en una corriola




(a) (b)

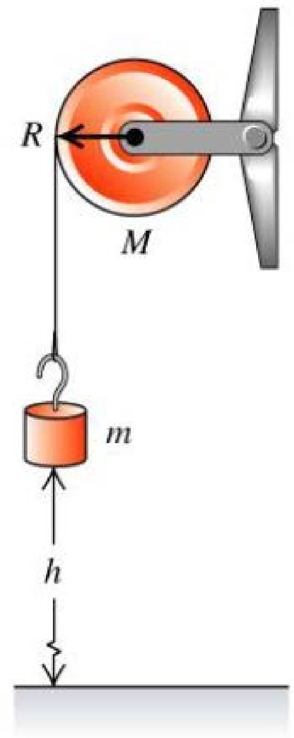
# Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix

Dos masses m1 i m2 estan unides per una corda inextensible i sense massa, a través d’una corriola de radi R, massa M i sense fricció. Calcula l’acceleració del sistema i la tensió de la corda.



# Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix

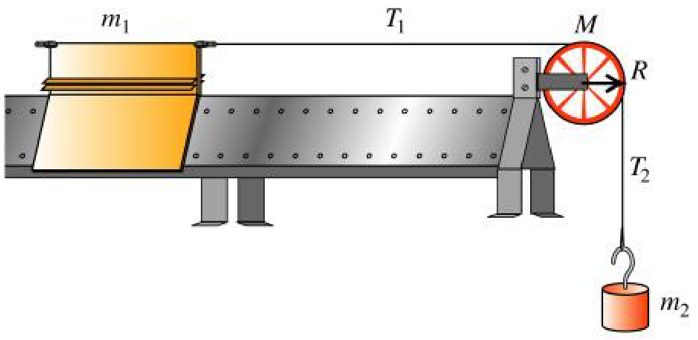
Es té una corda enrrotllada en una corriola massiss de radi R i massa M. Si penja una massa m de la corda, troba l'acceleracíó de la massa m i l'acceleració angular del disc de la corriola.



# Rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix

Un pati, de massa $m_1$, llisca sense fricció per un carril pneumàtic horitzontal per l'acció d'una massa $m_2$ a la que està nuat mitjançant una corda de massa negligible que passa per una politja de massa $M$, radi $R$ i moment d'inèrcia $I = MR^2$ col·locada al final del carril. Si la corda no patina en la politja, calculeu:

a) L'acceleració de cada cos
b) L'acceleració angular de la politja
c) La tensió de la corda a cada part de la politja

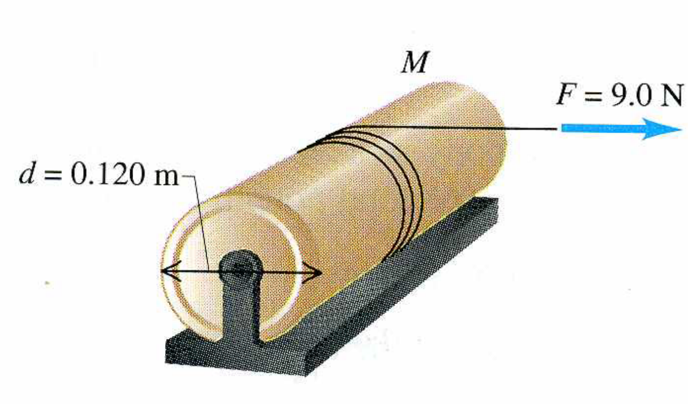


# Energia en el moviment rotacional

L'energia cinètica de rotació es defineix com

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

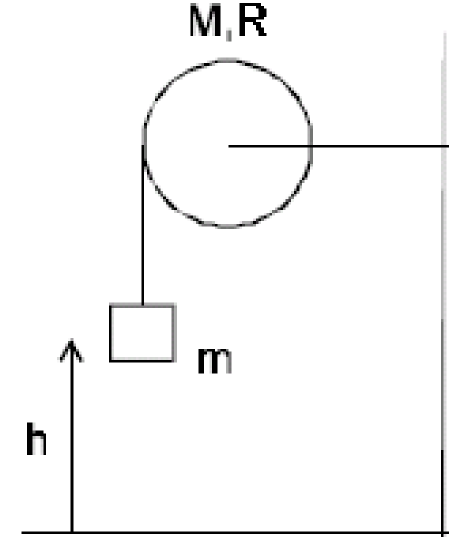
Un cable està enrotllat diverses voltes al voltant d'un cilindre sòlid de massa 50 kg i i diàmetre 0.12 m, que gira al voltant d'un eix horitzontal que passa pel seu centre i que està fixat per dos suports sense fregament. El cable s'estira amb una força constant de 9 N una distància de 2 m de manera que, en desenrotllar-se sense lliscar, fa girar el cilindre. Si el cilindre estava inicialment en repòs, trobeu la seua velocitat angular i també la velocitat final del cable.



# Energia en el moviment rotacional

Per comprovar la conservació de l'energia en un moviment rotacional, s'enrotlla un cable lleuger i flexible al voltant d'un cilindre sòlid de massa $M$ i radi $R$. El cilindre gira amb un fregament negligible respecte d'un eix horitzontal fix. El final lliure del cable es nua a un objecte de massa $m$ que es deixa caure des d'una altura $h$ respecte del terra amb velocitat inicial zero. Trobeu la velocitat de l'objecte i la velocitat angular del cilindre en el moment que el primer toca terra.

Sol.: $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + M/2m}}$




## Energia potencial d'un cos extens

$$U = Mgy_{cm}$$

# Rotació i traslació combinades.

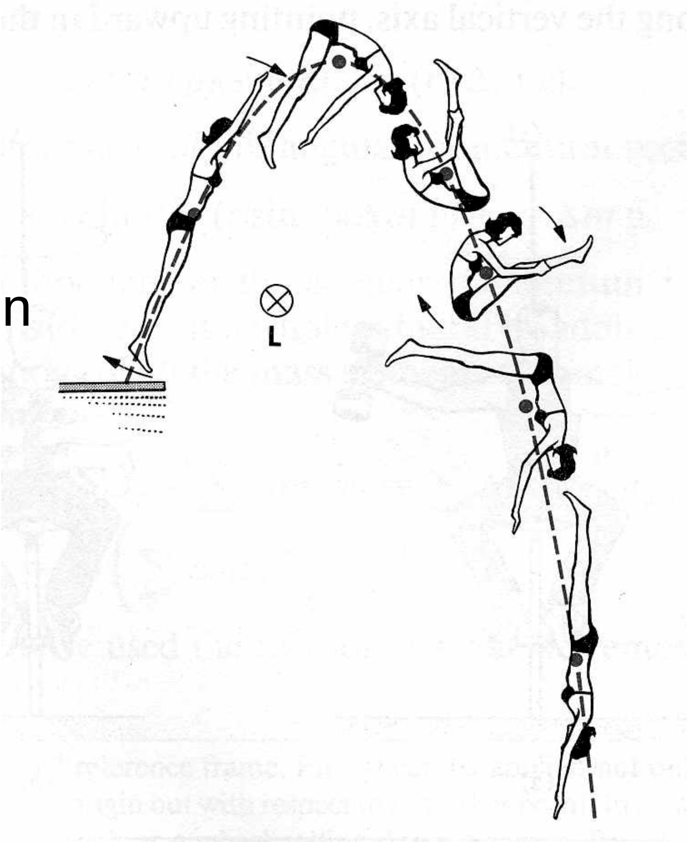
Dinàmica del sòlid rígid en translació i rotació

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = M\vec{\mathbf{a}}_{cm}$$

$$\sum \tau = I_{cm}\alpha$$

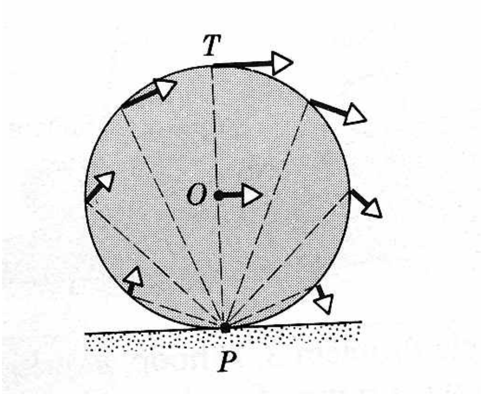
Aquestes equacions són vàlides quan l'eix de rotació es mou, si:

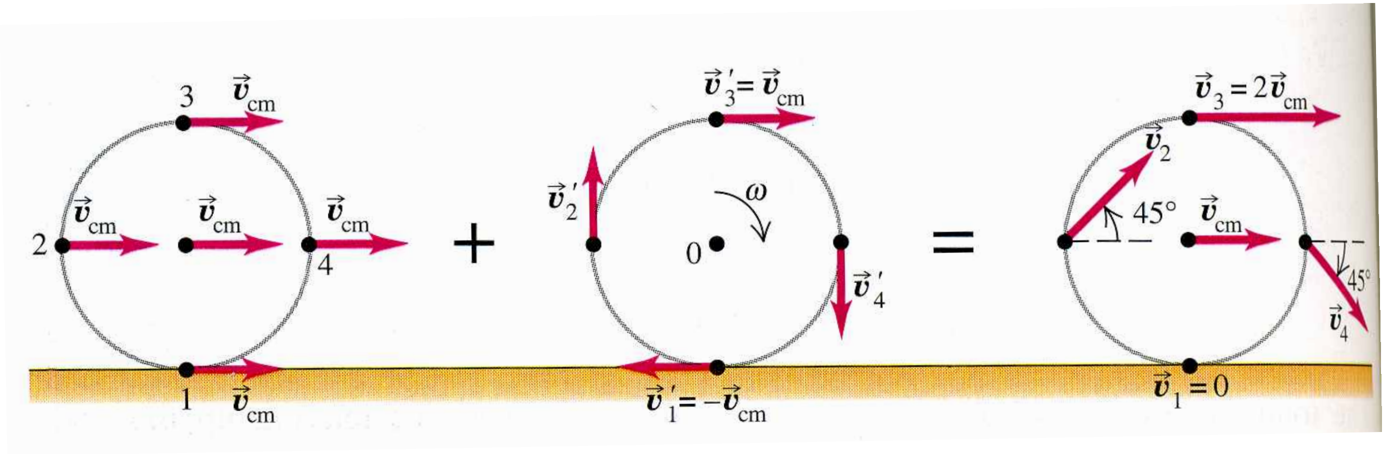
1. L'eix passa pel CM i és un eix de simetria
2. L'eix no canvia de direcció



## Rodament sense lliscament

$$v_{cm} = R\omega$$

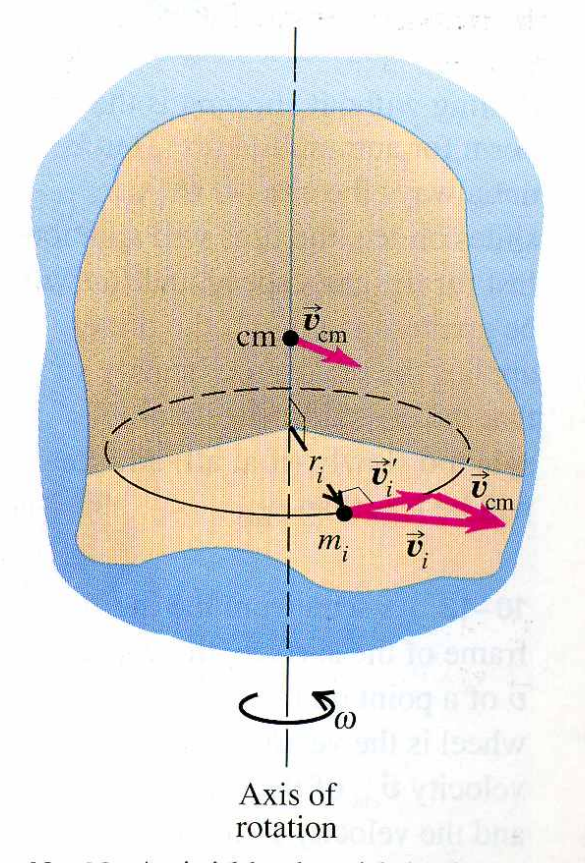


# Rotació i traslació combinades.

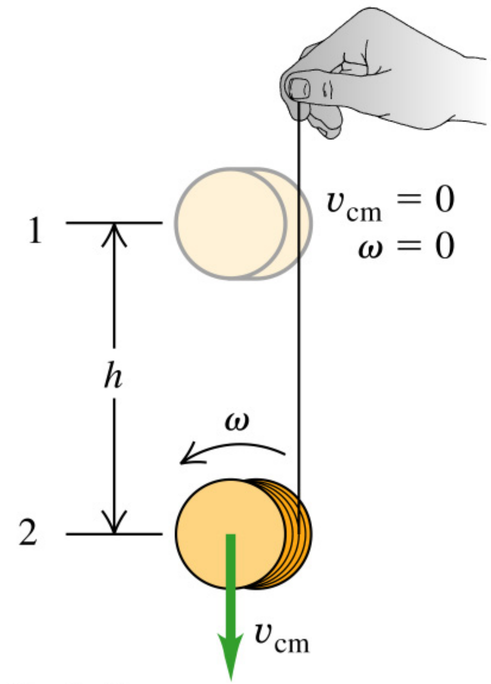
Energia cinètica per a un sòlid rígid en translació i rotació

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}{}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$



# Rotació i traslació combinades.

Un io-io primitiu es fa enrotllant un cordell varies vegades al voltant d'un cilindre sòlid de massa $M$ i radi $R$. Si es manté el final del cordell subjecte mentre es deixa anar el cilindre, el cordell es desenrotlla sense lliscar ni estirar-se mentre el cilindre cau i gira. Utilitza consideracions energètiques per trobar la velocitat $v_{CM}$ del centre de masses del cilindre després d'haver caigut una distància $h$.



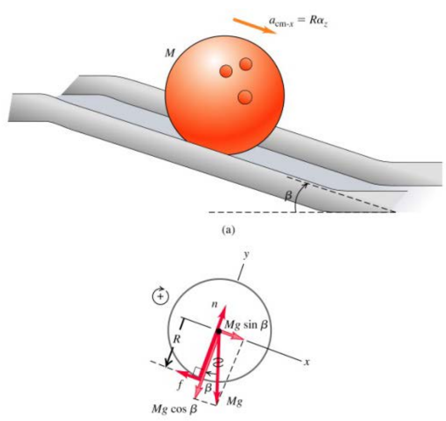
# Rotació i traslació combinades.

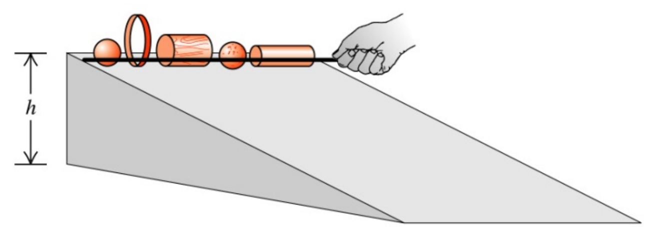
Problema

Un cos de massa *M*, radi exterior *R* i moment d'inèrcia respecte de l'eix de simetria *I* roda sense lliscar per un pla inclinat un angle q des d'una altura h

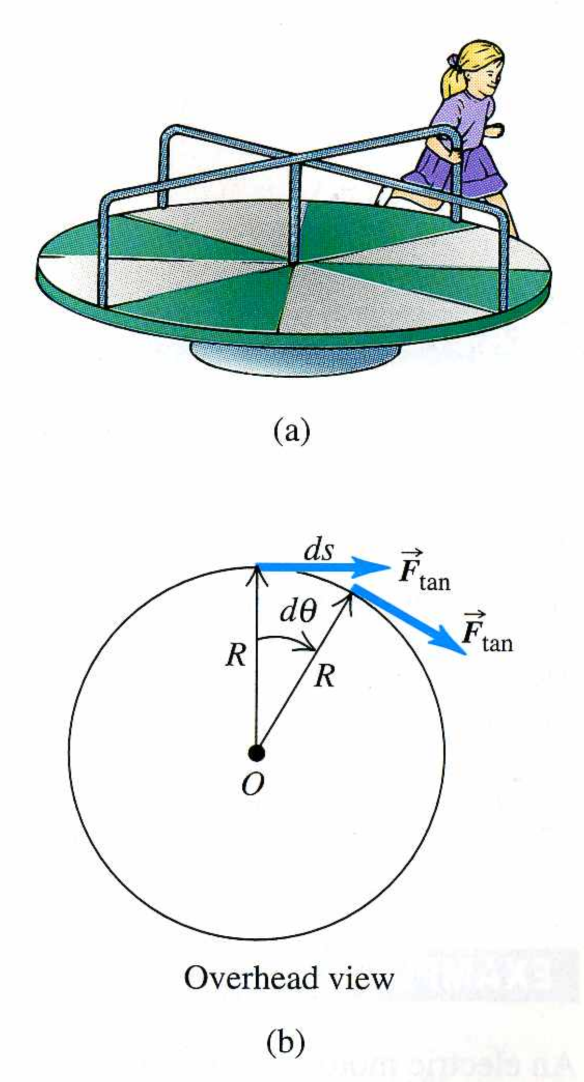
Calculem la velocitat amb que arriba a la base..

Particularitzem ara al cas d'un cilindre, una esfera i un cèrcol, tots tres amb el mateix radi R, massa M, i coeficient de fregament estàtic m.



# Treball i potència en el moviment rotacional




Treball

$$dW = F_{\tan} R d\theta$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta$$

Teorema del treball-energia

$$W_{tot} = \frac{1}{2} I \omega_2^{\,2} - \frac{1}{2} I \omega_1^{\,2}$$

Potència

$$P = \tau \omega$$

# Treball i potència en el moviment rotacional

La màxima potència del motor d'un cotxe són 200 CV a 6000 rpm. Quin és el corresponent parell motor?

Un motor elèctric realitza un parell motor constant $\tau = 10$ Nm sobre una pedra d'esmolar muntada en el seu eix. El moment d'inèrcia de la pedra és $I = 2$ kg m$^2$. Si el sistema comença a moure des del repòs, trobeu el treball fet pel motor en 8 s, l'energia cinètica de la pedra en eixe instant i la potència mitjana lliurada pel motor.