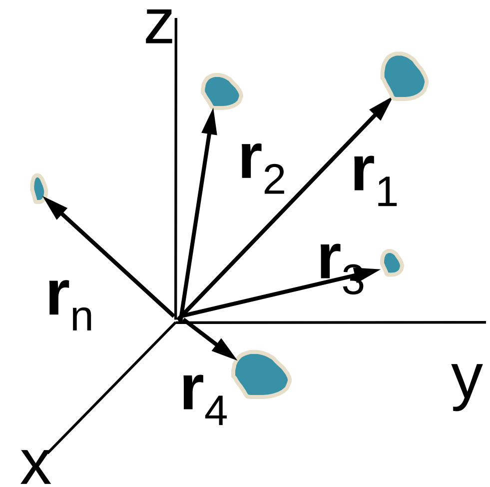
Física.
Tema 5
Dinàmica de sistemes

Centre de masses: sòlids, cossos compostos.
Moment lineal.
Conservació del moment lineal.
Col·lisions
Conservació del moment i l'energia.

Centre de masses

Si el sistema està format per un conjunt de *n* partícules discretes, distribuï-des en un espai tridimensional, el centre de masses es defineix com

$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

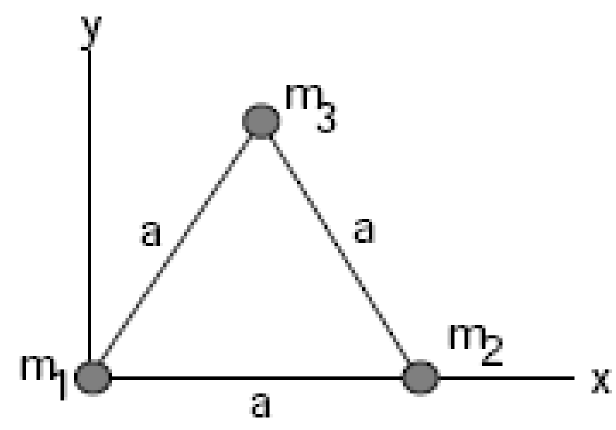


Que en coordenades cartesianes es queda

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Centre de masses

Tenim tres partícules de masses m_1 =0.3 kg, m_2 = 0.7 kg i m_3 = 2 kg, situades als vèrtexs d'un triangle equilàter de costat a = 45 cm. ¿On es troba el centre de masses?

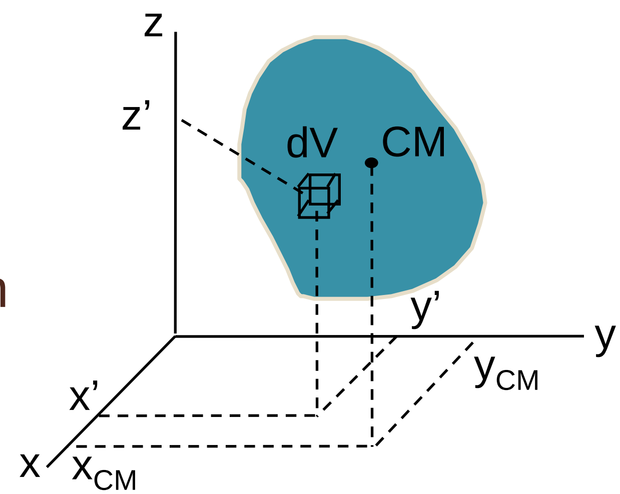


Centre de masses

Definició

Si el sistema es ara un cos extens, la massa està distribuïda en l’espai i el centre de masses es calcula a partir de l’expressió

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int \vec{\mathbf{r}}'\, dm}{\int dm}$$

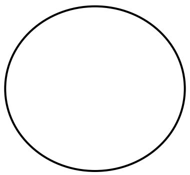


Si la massa està distribuïda uniformement en un volum, $\rho = \frac{M}{V}$

En general, podem escriure la densitat com

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

I, aleshores $\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int \rho \vec{\mathbf{r}}'\, dV}{\int \rho\, dV}$ Si ρ =ct, $\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int \vec{\mathbf{r}}'\, dV}{\int dV}$

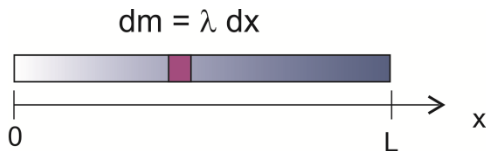


Centroid

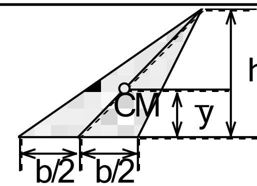
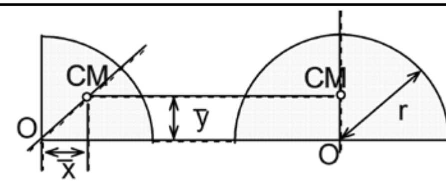
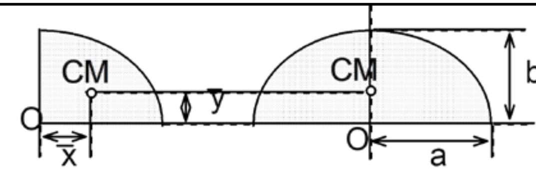
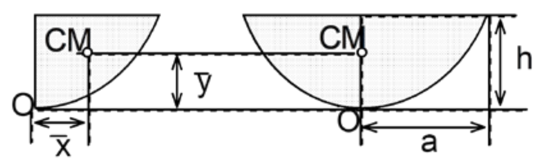
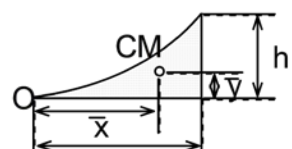
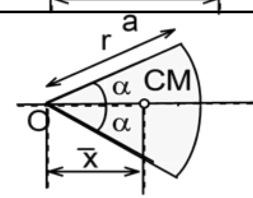
Centre de masses

Determineu la massa total, i la posició del CM, d’una barreta de longitud L de densitat lineal variable.

$$\lambda = \gamma x / L^2$$



Centre de masses

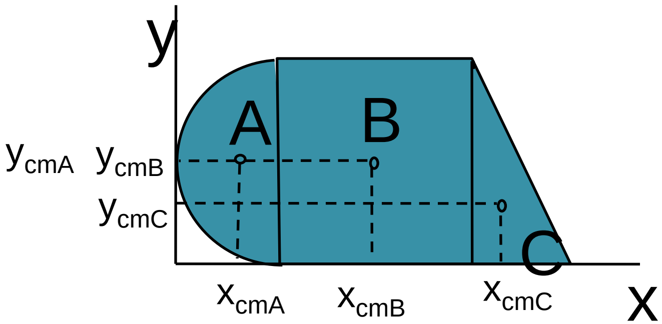
Forma		x_{cm}	y_{cm}	Àrea
Àrea triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un quart d'àrea circular Àrea semicircular		$\frac{4r}{3\pi}$ 0	$\frac{4r}{3\pi}$ $\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$ $\frac{\pi r^2}{2}$
Quart d'àrea el·líptica Àrea semiel·líptica		$\frac{4a}{3\pi}$ 0	$\frac{4b}{3\pi}$ $\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$ $\frac{\pi ab}{2}$
Àrea semiparabòl·lica Àrea parabòl·lica		$\frac{3a}{8}$ 0	$\frac{3h}{5}$ $\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$ $\frac{4ah}{3}$
Extradós parabòl·lic		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Centre de masses

Elements compostos

Si tenim un objecte que podem separar en elements dels que coneixem la posició del centre de masses, puc calcular la posició del centre de masses del conjunt d'una manera molt senzilla:

$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{m_A\vec{\mathbf{r}}_A + m_B\vec{\mathbf{r}}_B + m_C\vec{\mathbf{r}}_C}{m_A + m_B + m_C}$$



$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C}$$

$$y_{cm} = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C}{m_A + m_B + m_C}$$

Centre de masses

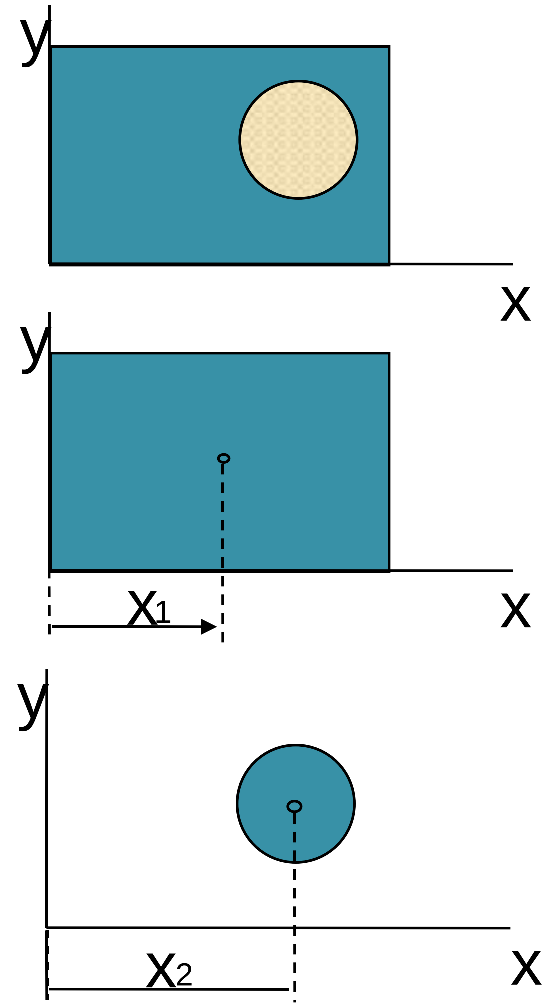
Forats

Quan tenim forats cal tractar aquest com una massa negativa:

$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 - m_2\vec{\mathbf{r}}_2}{m_1 - m_2}$$

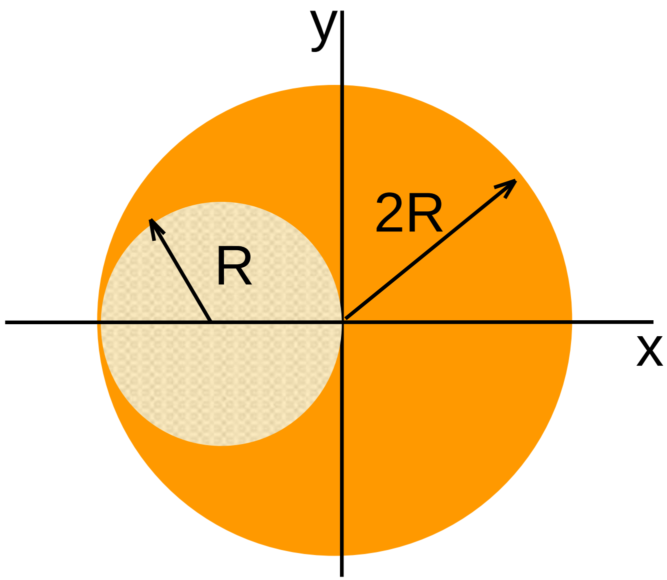
$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 - m_2}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 - m_2 y_2}{m_1 - m_2}$$



Centre de masses

Una placa circular de radi 2R té un forat circular, tangent a la vora, de radi R. Hem de calcular la posició del centre de masses

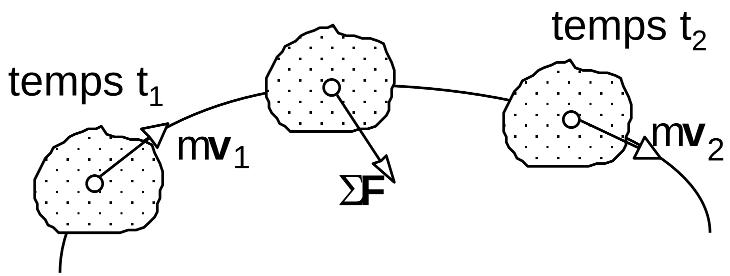


Moment lineal

Es defineix la quantitat de moviment lineal o, simplement, moment lineal com $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$

Considerem un cos que es mou sota l'acció d'un conjunt de forces. La llei del moviment és

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{d}\,\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{d}t}$$



Si integrem respecte del temps obtenim

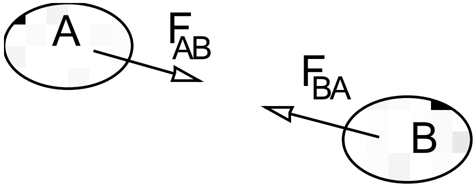
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}\mathbf{d}t = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$$

La quantitat de l'esquerra s'anomena *impuls lineal*, i el resultat és el *principi de l'impuls i la quantitat de moviment lineal*:

"L'impuls aplicat a un cos durant un interval de temps és igual al canvi de la seua quantitat de moviment lineal."

Conservació del moment lineal

Considerarem ara dos cossos en interacció i veurem que en aquells casos en què es pot ignorar la influència de forces externes, el moment lineal total es conserva.



$$\vec{\mathbf{F}}_{AB} + \vec{\mathbf{F}}_{BA} = 0$$

Per a cada cos es compleix

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t}$$

Per tant el canvi de moment dels dos cosos en la interacció està relacionat

Conservació del moment lineal

Si la influència d'altres forces a banda de les indicades és negligible, podem aplicar el principi de l'impuls i la quantitat de moviment a cadascun dels cossos *A* i *B* de la següent manera

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}_{AB} \mathrm{d}t = \vec{\mathbf{p}}_{A2} - \vec{\mathbf{p}}_{A1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}_{BA} \mathrm{d}t = \vec{\mathbf{p}}_{B2} - \vec{\mathbf{p}}_{B1}$$

En sumar aquestes dues equacions obtenim

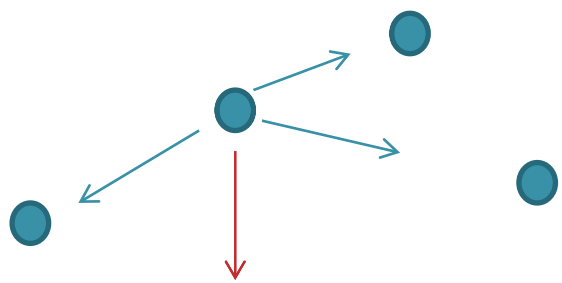
$$\vec{\mathbf{p}}_{A1} + \vec{\mathbf{p}}_{B1} = \vec{\mathbf{p}}_{A2} + \vec{\mathbf{p}}_{B2}$$

i així, la quantitat de moviment lineal *total* es conserva

$$\boxed{\vec{\mathbf{p}}_{A} + \vec{\mathbf{p}}_{B} = const.}$$

Conservació del moment lineal

Considerarem ara un sistema més gran el el qual cada cos té la influència de cosos que formen part del sistema, I a més forces externes al sistema



$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \longrightarrow \sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{int}} + \sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \xrightarrow{\sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{int}} = 0} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Aixi demostrem que el moment ttoal del sistema sols canvia si existeixen forces externes. Per tant si no existeixen forces externes el moment total es conserva

$$\boxed{si \quad \sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}} = 0 \rightarrow \vec{\mathbf{p}} = ct}$$

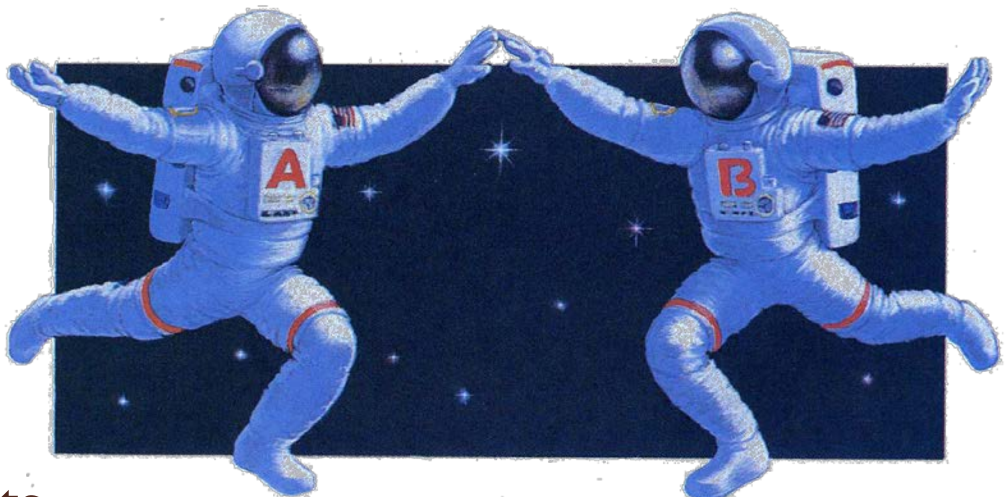
Conservació del moment lineal

En l'espai no existeixen forces externes sobre el sistema com la gravetat. Per tant les intreaccions estaran regulades per l'intercanvi de quantitat de moviment

Conservació del moment lineal

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}_{AB} \mathbf{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}_{BA} \mathbf{d}t$$

$$\Delta \vec{\mathbf{p}}_A = -\Delta \vec{\mathbf{p}}_B$$



(a)

Si inicialment estaven parats

$$\vec{v}_A = -\frac{m_B}{m_A} \vec{v}_B$$

Conservació del moment lineal

Com desplaçar-se en l'espai?

Conservació del moment lineal

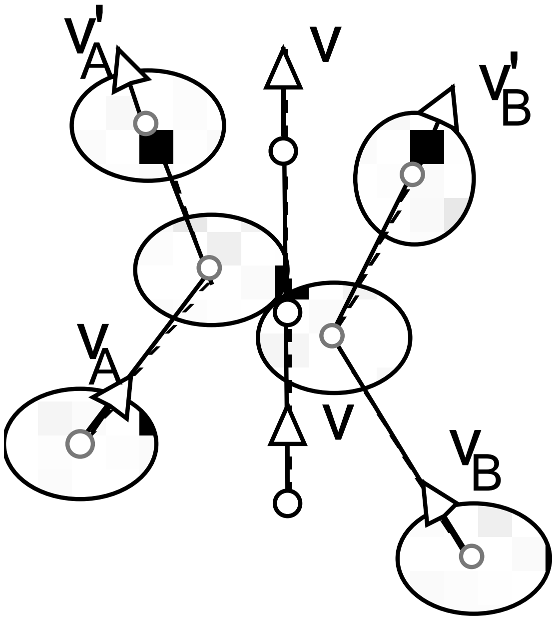
Com es desplaça un cohet espacial?

Col·lisions

Si podem negligir l'efecte de les forces externes, el moment lineal total es conserva,

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B$$

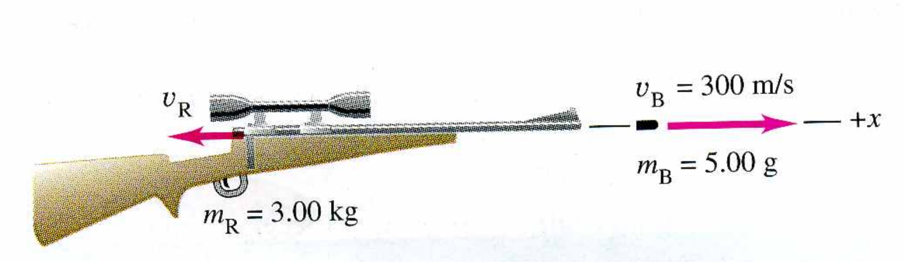
$$m_A \vec{\mathbf{v}}_A + m_B \vec{\mathbf{v}}_B = m_A \vec{\mathbf{v}}'_A + m_B \vec{\mathbf{v}}'_B$$



Conservació del moment lineal

En una demostració, es subjecta un rifle de 3 kg de manera que pot retrocedir lliurement després de ser disparat. Si es dispara una bala de massa 5g amb una velocitat de 300 m/s, calculeu

a) La velocitat de retrocés del rifle
b) El moment lineal de la bala i la seua energia cinètica.
c) El moment lineal del rifle i la seua energia cinètica.



Col·lisions

S'anomena una col·lisió *elàstica* quan l'energia cinètica total del sistema de partícules es manté constant durant la col·lisió, és a dir

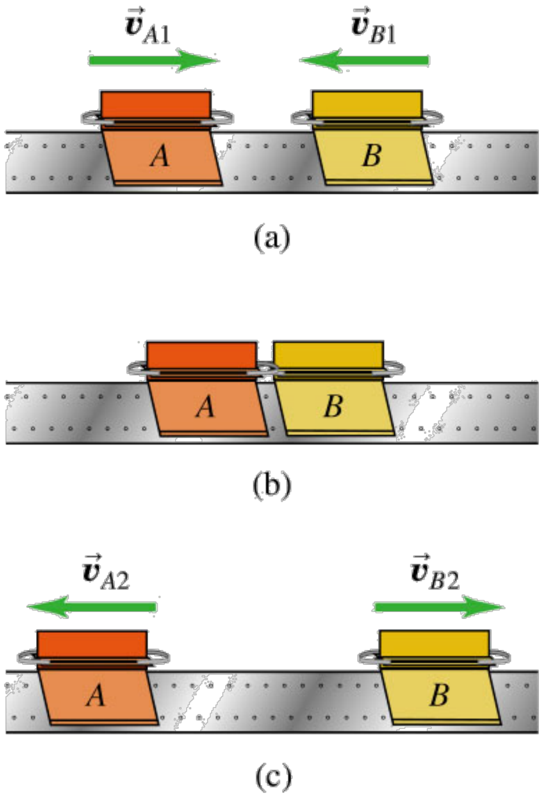
$$K_T = K'_T$$

$$K_A + K_B = K'_A + K'_B$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A_1}{}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B_1}{}^2 = \frac{1}{2} m_A v'_{A_2}{}^2 + \frac{1}{2} m_B v'_{B_2}{}^2$$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B$$

$$m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_1} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_1} = m_A \vec{\mathbf{v}}'_{A_2} + m_B \vec{\mathbf{v}}'_{B_2}$$



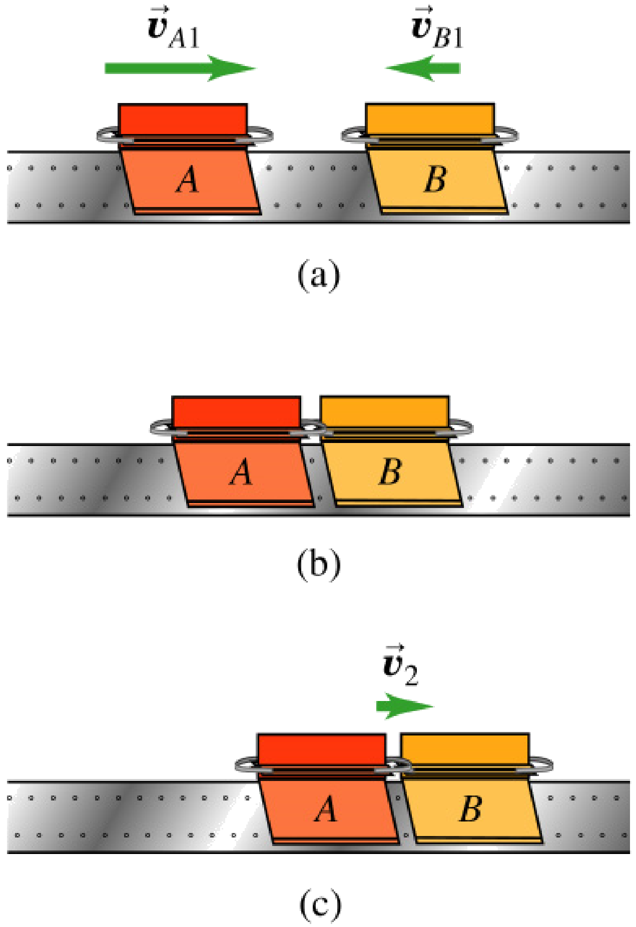
Col·lisions

Una col·lisió en què els dos cossos s'apeguen i continuen units després de la col.lisió, s'anomena totalment inelàstica o plàstica

$$K \neq K'$$

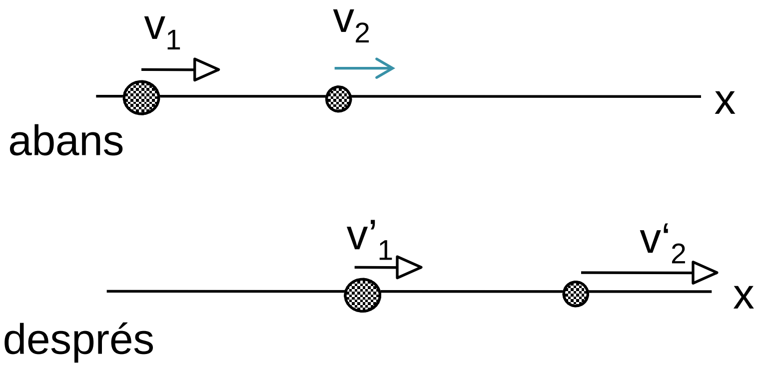
$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B$$

$$m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_1} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_1} = (m_A + m_B)\vec{\mathbf{v}}'_2$$



Col·lisions

Col.lisions directes



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v' + m_2 v'_2$$

$$v'_2 - v'_1 = -e(v_2 - v_1)$$

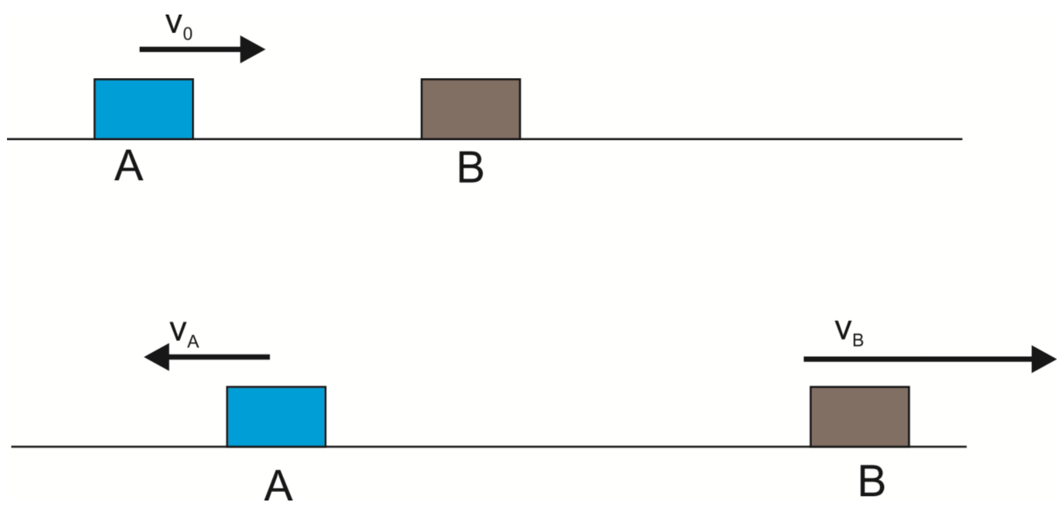
e es defineix com el coeficient de restitució

En col.lisions elàstiques, e=1

En col.lisions inelàstiques, $0 \leq e < 1$

Col·lisions

Col.lisions directa elàstica (es conserva l'energia i la quantitat de moviment)

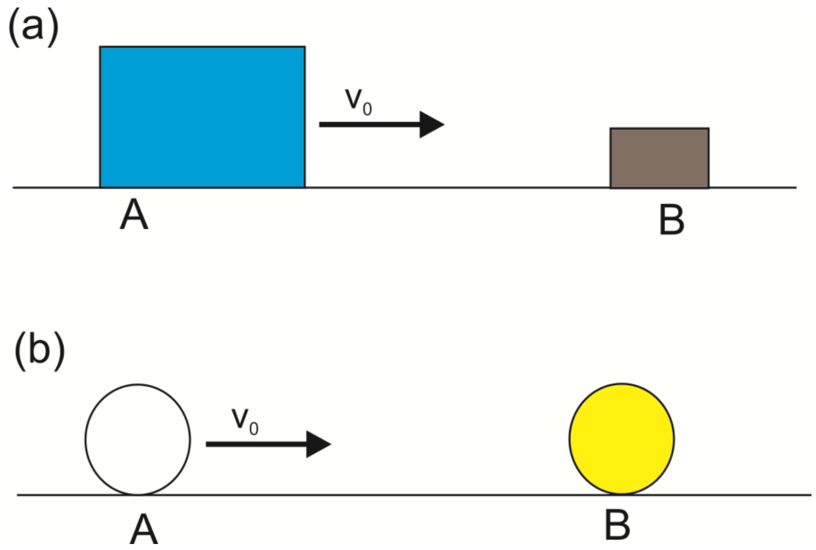


$$v_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0$$

$$v_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_0$$

Col·lisions

Problema:
Determina la velocitat final dels dos cossos en una col·lisió elàstica



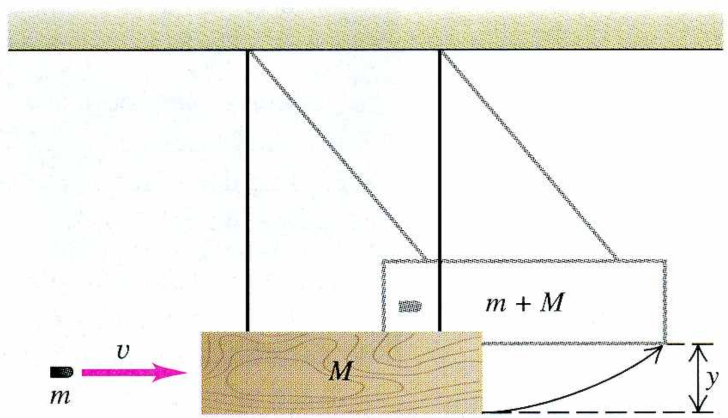
$$a)\, M >> m$$
$$b)\, m_A = m_B = m$$

Conservació del moment i l'energia

En aquest problema considerem l'utilització d'un pèndol balístic, amb el qual podem determinar la velocitat d'una bala. Quan una bala de massa m = 8 g impacta sobre el bloc de massa M = 4.3 kg, aquest s'alça una altura h = 6 cm.

a) ¿Quina és la velocitat de la bala abans de l'impacte?

b) Calculeu la fracció de l'energia mecànica del sistema (bala + bloc) que roman després de la col·lisió.



Conservació del moment i l'energia

La bola colpeja el pal i hi queda adherida. El coeficient de fregament del tauló amb el terra és μ

¿Quina és la velocitat de la bola quan olpeja el pal?
¿Quina distància recorre el tauló en el terra?