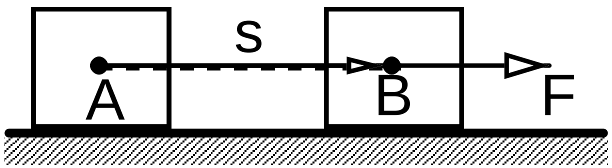
Tema 4
Treball i energia

El treball.
Treball i energia cinètica.
Potència.
Energia potencial i la conservació de l'energia.
Força i energia potencial

El treball

En la definició de treball es considera l'actuació d'una força al llarg d'una trajectòria o camí. Per al cas d'una força constant F que actua sobre un cos mentre aquest es desplaça una distància *s* en línia recta, i de manera que la força i el desplaçament tenen la mateixa direcció, definim el treball com el producte de la magnitud (mòdul) de la força, per l'espai recorregut:

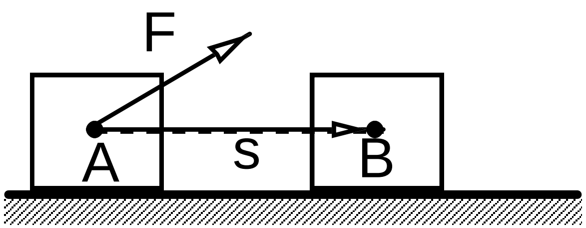
$$W = F s$$



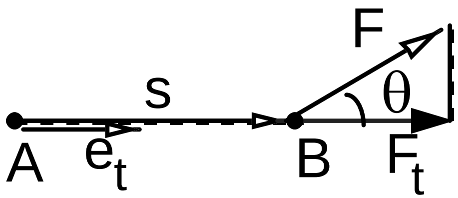
El treball

Considerem ara una trajectòria rectilínea des d'un punt *A* a un altre *B*, i una força F que forma un cert angle θ amb la direcció del desplaçament. Definim el treball *W* de manera que tan sols hi contribueix el component de la força al llarg del desplaçament, això és, el *component tangencial*

$$W = F_t s = (F\cos\theta)s = F s\cos\theta$$

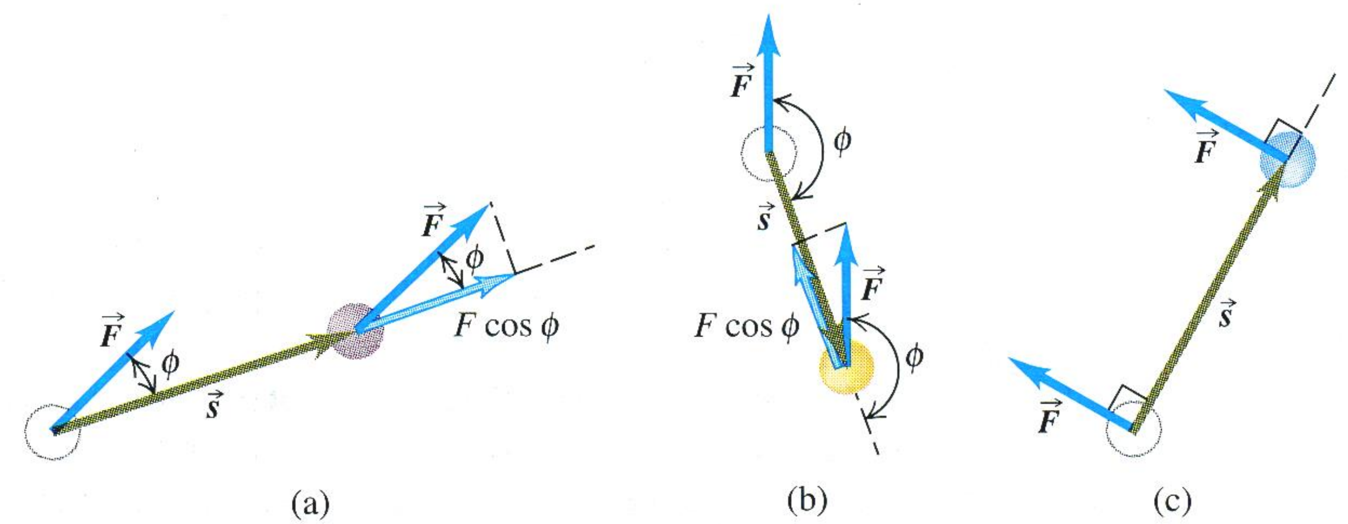


(a)



(b)

El treball i la conservació de l'energia.



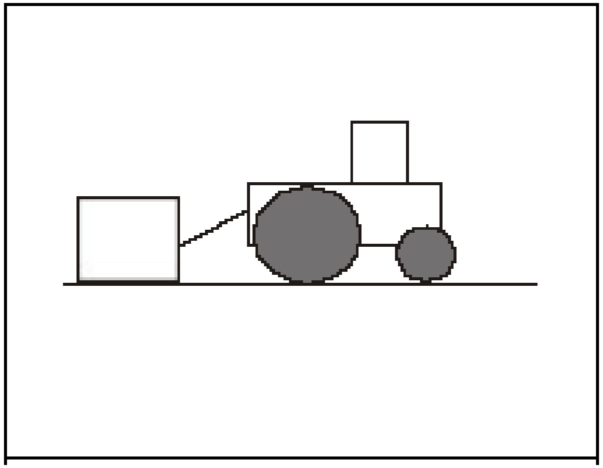
Si són diverses les forces que actuen sobre un cos, quan es calcula un treball s'ha d'especificar clarament de quina força es tracta.

El *treball net* o *treball total* efectuat sobre el cos ve donat pel treball que realitza la força resultant.

El treball

Un tractor arrossega una càrrega de troncs al llarg de 20.0 m. El pes de la càrrega és 14700 N. El tractor exerceix una força constant de 5000 N amb un angle de 36.9º sobre l'horitzontal. Existeix una força de fricció de 3500 N oposada al moviment.S'ha de trobar el treball efectuat per cada força que actua sobre la càrrega i el treball total efectuat per totes les forces.

Sol: $W_T = 10$ kJ



El treball

Quan passem a considerar un desplaçament finit entre dos punt *A* i *B*, el treball total *W* consistirà en la suma de les quantitats d*W*,

$$\mathrm{W} = \sum \mathrm{d}W \quad = \vec{\mathbf{F}}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_3 + \ldots \quad = \sum F_t \mathrm{d}s$$

que podem expressar com una integral

$$W = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}$$

$$W = \int_A^B F_t \, \mathrm{d}s$$

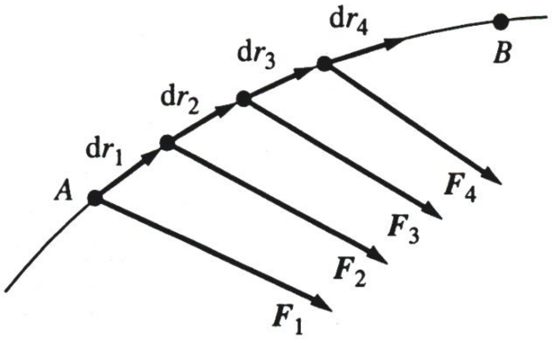


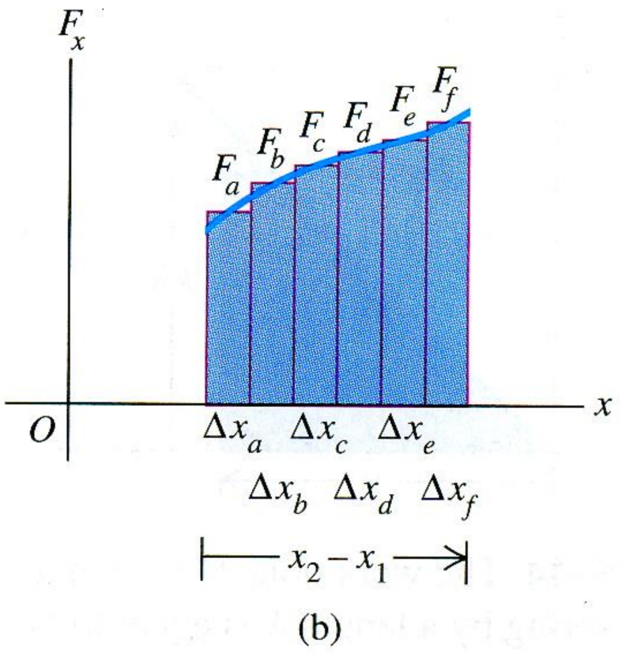
Figura 9.5 El trabajo total es la suma de muchos trabajos infinitesimales.

El Treball

Expressió del treball per a una força variable

$$W = \int_A^B F_t \, ds$$

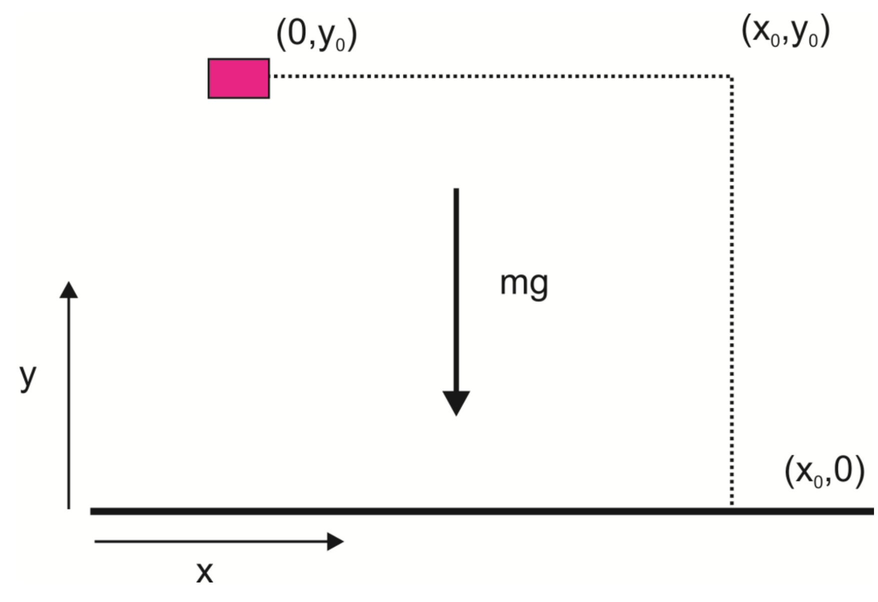
El treball realitzat per una força entre dos punts *A* i *B*, es pot interpretar com l'àrea de la corba $F_t(s)$ entre aqueixos punts.



El Treball

Un bloc de massa m realitza la trajectòria indicada, des d'un punt A, $(0,y_0)$ fins el punt B, $(x_0, 0)$. Calcula el treball que fa la força pes, per integració de l'expressió

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$



El treball

Treball realizat per una molla

$$F = -kx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

$$W = \frac{1}{2}k\left(x_1^{\,2} - x_2^{\,2}\right)$$

Observem que el treball efectuat per la molla és positiu, *W*>0, si *x2* < *x1*,
i és negatiu, *W*<0, si *x2* > *x1*

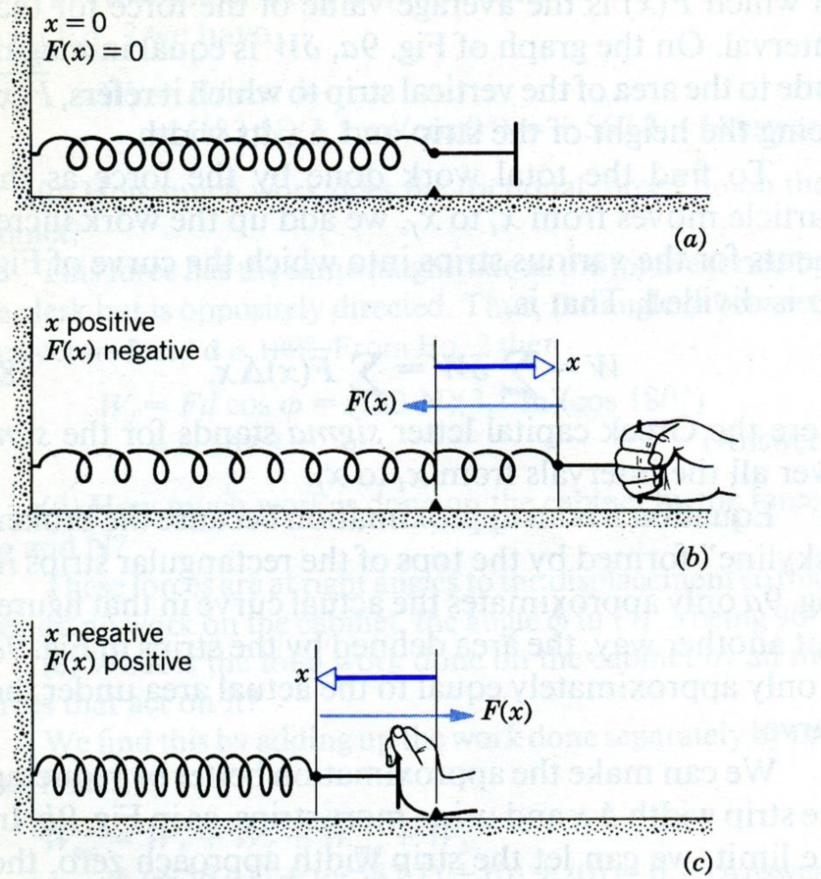


Figure 10 (*a*) A spring, with an attached handle, in its relaxed state. The small triangle marks the end point of the spring. (*b*) The spring is stretched by an amount *x*. Note th restoring force exerted by the spring. (*c*) The spring is compressed by an amount *x*. Again, note the restoring force $F(x)$ and *x* have opposite signs, as predicted by Eq. 11.

Treball i energia cinètica.

Considerem una partícula en moviment sota l'acció d'un conjunt de forces. De la segona llei de Newton s’obté la següent equació per al component tangencial de la força neta:

$$\sum F_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Així doncs, el treball elemental realitzat per la força neta és

$$\mathrm{d}W = \left(\sum \mathbf{F}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

$$= \left(\sum F_t\vec{\mathbf{e}}_t + \sum F_n\vec{\mathbf{e}}_n\right)\cdot(\mathrm{d}s\,\mathbf{e}_t)$$

$$= \sum F_t\,\mathrm{d}s$$

$$= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v = mv\mathrm{d}v$$

Treball i energia cinètica.

Per tant, el treball realitzat per la força neta, o, el que és el mateix, el *treball total* que fan les forces en moure el cos del punt *A* al punt *B* és

$$W_{tot} = \int_A^B \left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}$$

$$= \int_A^B mv\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2} m{v_B}^2 - \frac{1}{2} m{v_A}^2$$

Treball i energia cinètica.

Definim l'*energia cinètica* (que té la mateixa dimensió que el treball, i per tant es mesura en joules)

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

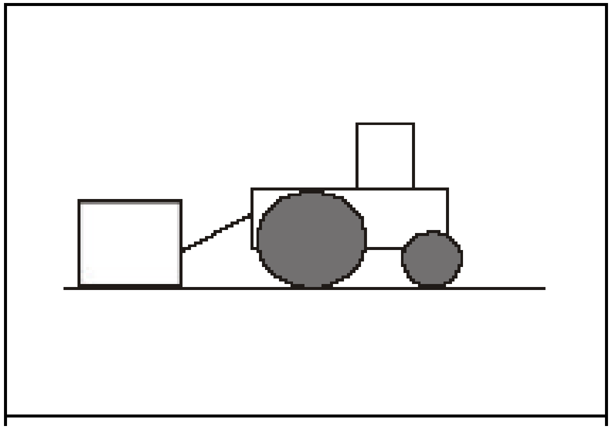
Aleshores $$W_{tot} = E_{c,B} - E_{c,A} \quad \text{o} \quad W_{tot} = \Delta E_c$$

És el *teorema del treball-energia*:

“El treball que fa la força resultant sobre una partícula és igual al canvi de la seua energia cinètica.”

Treball i energia cinètica.

Un tractor arrossega una càrrega de troncs al llarg de 20.0 m. El pes de la càrrega és 14700 N. El tractor exerceix una força constant de 5000 N amb un angle de 36.9º sobre l'horitzontal. Existeix una força de fricció de 3500 N oposada al moviment. Així, el treball total efectuat per totes les forces és 10 kJ. Si la velocitat inicial és 2.0 m/s, ¿quina és la velocitat final?



Treball i energia cinètica.

Problema

La força que actua sobre una particula de massa m te la forma

$$F = 3\ z^2 - z$$

- Trobeu el treball realitzat per la força en dur la partícula de la posició inicial z = 0, a una posició z.
- Utilitzant el teorema de treball-energia, trobeu l'expressió de la velocitat en funció de la posició, si la velocitat inicial és zero.

Potència

En moltes aplicacions pràctiques és important la *raó* o velocitat amb què es fa treball o consumeix energia.
Es defineix la *potència* com el treball que es fa per unitat de temps

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

La unitat SI de potència és el *watt*, W = J s^{-1}.
Altres unitats corrents són el quilovat (kW), el megavat (MW) i el gigavat (GW).
El *cavall de potència* és igual a 745.7 W.
El *quilovat hora* (kWh) és una unitat d'energia.

Potència

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

Per a una partícula en moviment

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Potència mitjana

$$\overline{P} = P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t} P_{ins} \mathrm{d}t'$$

Potència

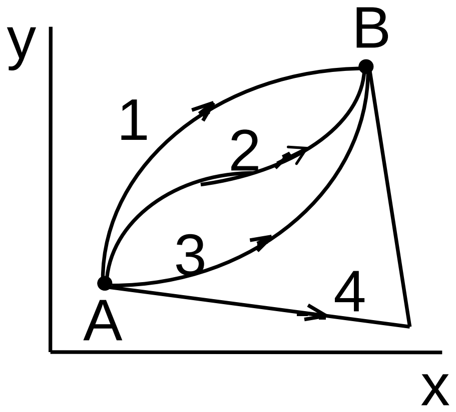
Problema

Una persona que pesa 50 kg puja corrents l'escala d'un edifici de 433 m en 15.0 minuts. ¿Quina és la potència mitjana desenvolupada en kilowatts?

Energia potencial

Forces conservatives

Siga una força F, i considerem el treball realitzat per la força sobre una partícula quan la partícula es desplaça entre dos punts qualssevol *A* i *B* per diversos camins.



Hi ha forces per a les quals el treball al llarg dels diversos camins 1, 2, 3, 4, i qualsevol altre camí entre *A* i *B*, és el mateix. Donem a aquestes forces un nom especial:

"Una força és conservativa si el treball que efectua sobre una partícula quan aquesta es desplaça d'un punt *A* a un altre *B* no depèn de la trajectòria, tan sols dels punts *A* i *B*."

Energia potencial

Energia potencial

Per a una força conservativa F podem escriure el treball de la següent manera:

$$W=\int_A^B \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}=E_p(\vec{\mathbf{r}}_A)-E_p(\vec{\mathbf{r}}_B)=-\left(E_p(\vec{\mathbf{r}}_B)-E_p(\vec{\mathbf{r}}_A)\right)$$

és a dir, com la diferència (canviada de signe) d'una certa quantitat, anomenada *energia potencial*, avaluada en els punts inicial i final.

Per a una força conservativa donada F, determinarem la funció energia potencial de la següent manera

$$E_p(\mathbf{r})=E_p(\mathbf{r}_0)-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Força i energia potencial

Relació entre la força i l'energia potencial

$$\mathrm{d}W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} = F_t ds = -\mathrm{d}E_p$$

$$F_t = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s}$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; \; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z};$$

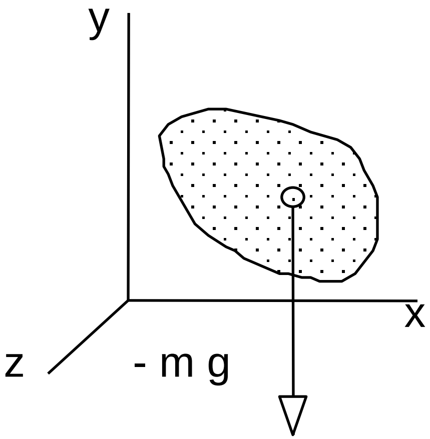
En 1 dimensió: la força és la derivada, canviada de signe, de l'energia potencial

$$F_t = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

Energia potencial

Energia potencial gravitatòria

$$\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{j}$$



Càlcul

$$E_p(\mathbf{r}) = E_p(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} (-mg\mathbf{j})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = E_p(\mathbf{r}_0) + mg(y - y_0)$$

Origen d'energies

$$E_p(y_0) = 0$$

Expressió de l'energia potencial

$$E_p = mgy$$

Energia potencial

Energia potencial d'una molla

$$F = -kx$$

Càlcul

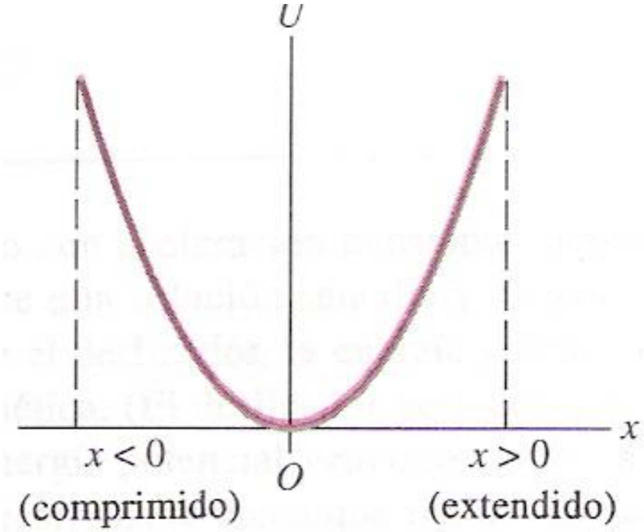
$$E_p(x) = E_p(x_0) - \int_{x_0}^{x} (-kx) \cdot \mathrm{d}x = E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x^2 - {x_0}^2)$$

Origen d'energies en la posició d'equilibri

$$E_p(0) = 0$$

Expressió de l'energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$



Conservació de l’energia

Conservació de l’energia

Considerem una partícula que es mou sota l'acció d'una única força conservativa F.

1. El treball efectuat per la força sobre la partícula entre dos punts *A* i *B* es pot expressar com el canvi de l'energia cinètica,

$$W_{tot} = E_{c,B} - E_{c,A} = \Delta E_c$$

2. El treball realitzat per una força conservativa és igual a *menys* l'increment de l'energia potencial

$$W_{tot} = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$$

Per tant

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

$$\Delta(E_c + E_p) = 0$$

Conservació de l’energia

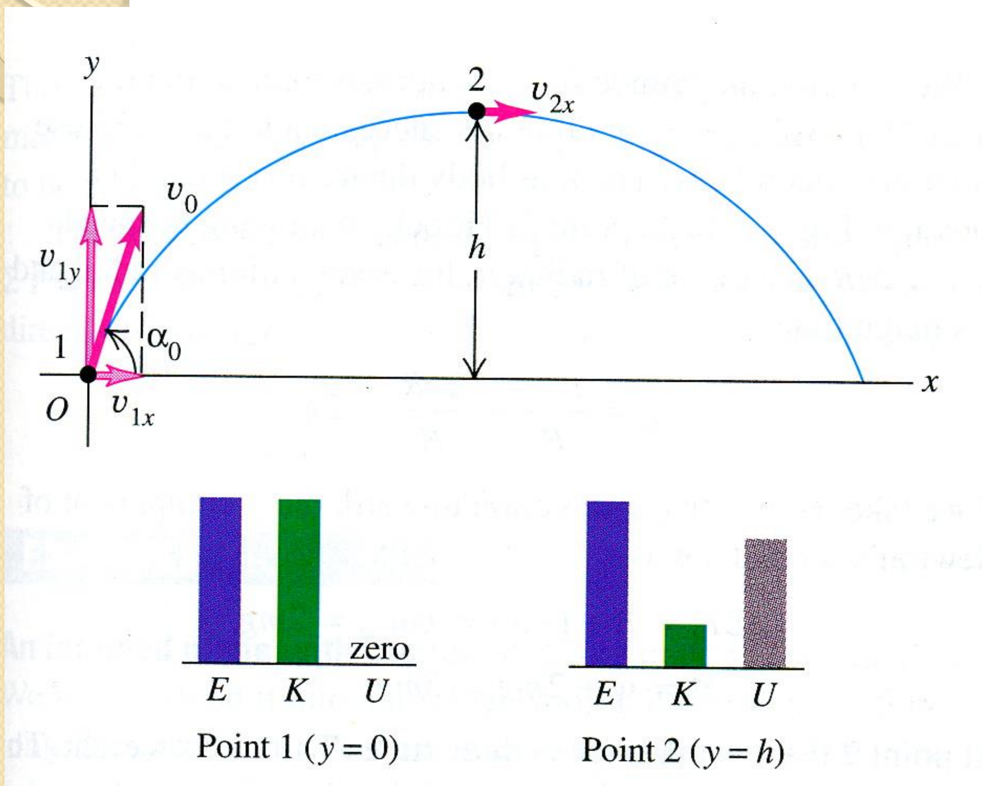
La quantitat E_c + E_p s'anomena *energia total* de la partícula, *E*.

“Si una partícula es mou sota l'acció de forces conservatives, l'energia total de la partícula és constant.”

Podem expressar també aquest enunciat dient que l'energia total *es conserva*,

$$E = E_c + E_p = K + V = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = const.$$

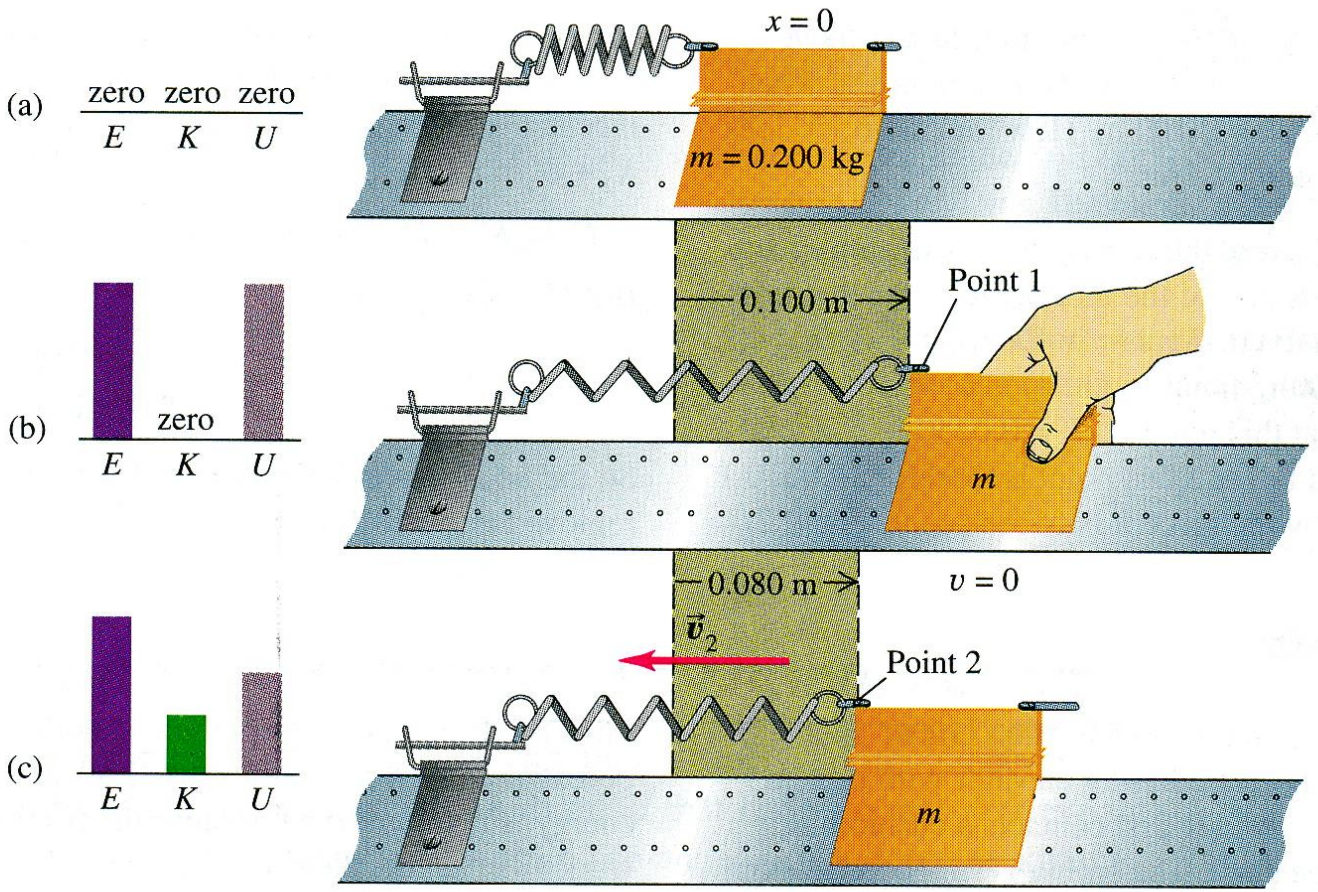
Conservació de l’energia



-6 Trajectory of a projectile.

Com l'energia potencial depèn de la posició de la partícula, la conservació de l'energia constitueix una lligadura entre velocitat i posició que s'ha d'acomplir per a qualsevol punt al llarg de la trajectòria. Aquesta relació imposada per l’energia total és molt útil per a determinar alguna característica (posició o velocitat) del moviment en un punt de la trajectòria, a partir de les dades de posició i velocitat que són conegudes.

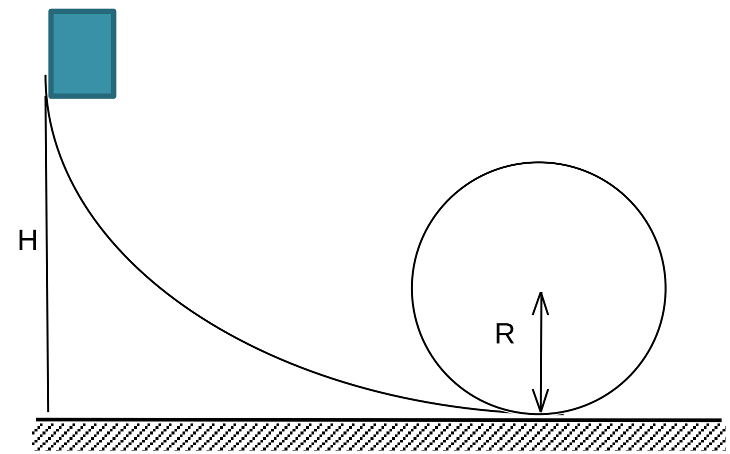
Conservació de l'energia

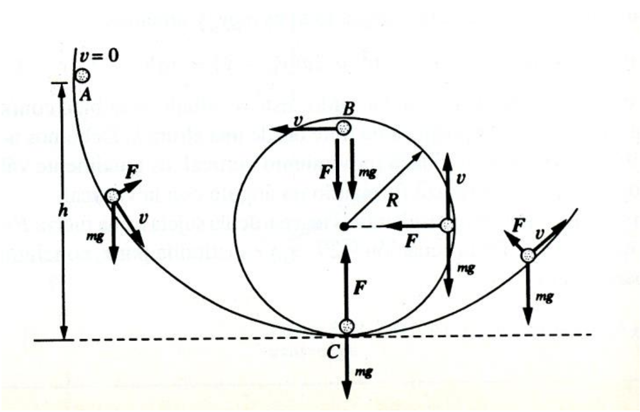


7–12 (a) An air-track glider attached to a spring. (b) Elastic potential energy is added to the system by stretching the spring. (c) Elastic potential energy is transformed to kinetic energy as the glider moves back toward its equilibrium position.

Conservació de l’energia

Calculeu la mínima altura *H* des de la qual ha de soltar-se un bloc per una rampa que fa un bucle redó de radi *R* perquè el bloc complete una volta sencera (sense fregament).





Conservació de l'energia

Altres forces que realitzen treball

1. El treball total s'expressa com el canvi de l'energia cinètica,

$$W_{tot} = E_{c,B} - E_{c,A} = \Delta E_c$$

2. El treball realitzat per les forces conservatives és igual a *menys* l'increment de l'energia potencial

$$W_{cons} = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$$

3. El treball total és el de les forces conservatives més el treball realitzat per altres forces (per exemple, fricció)

$$W_{tot} = W_{cons} + W_{altres} = E_{p,A} - E_{p,B} + W_{altres}$$

Per tant, l'expressió més general de la relació entre energía cinètica, energia potencial, i el treball realitzat per altres forces, és

$$E_{cA} + E_{pA} + W_{altres} = E_{cB} + E_{pB}$$

$$\boxed{E_A + W_{altres} = E_B}$$

Conservació de l'energia

Un bloc de massa m llisca per un pla inclinat, sense fregament, des d-una altura y_0. En arribar al final rebota en un moll elàstic. Calcula la velocitat que du quan arriba a la base del pla, i l'altura final que assoleix.

Suposem ara que el sistema te fricció dinàmica amb coeficient . Calcula l'altura final que assoleix després de rebotar. Aplica l'expressió

$$E_A + W_{altres} = E_B$$