Tema 2. Cinemàtica del punt

Posició, velocitat i acceleració. Moviment en una línia recta. Moviment en un pla. Moviment circular.

2.1. Posició, velocitat i acceleració

En un espai 1-D, definim la velocitat mitjana com

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Si fem que Δt→0, podem definir la velocitat en un disntant determinat com

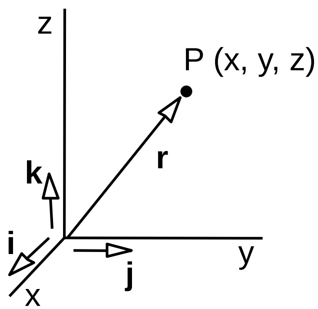
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

De la mateixa manera, podem definir l'acceració d'un punt en un instant donat com

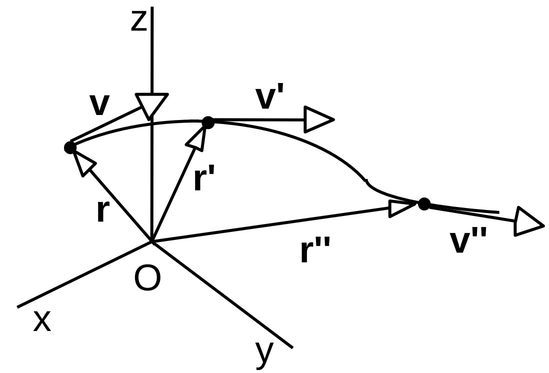
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

2.1. Posició, velocitat i acceleració

En un espai 3-D tenim el vector de posició:



$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$



la velocitat instantània la podem calcular com

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

i, l'acceleració queda:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

2.1. Posició, velocitat i acceleració

En coordenades cartesianes $\vec{r}(t) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

La velocitat es pot descompondre en els seus components

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\vec{\imath} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\vec{\jmath} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

I el mateix passa amb l'acceleració

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

2.2. Moviment en una línia recta

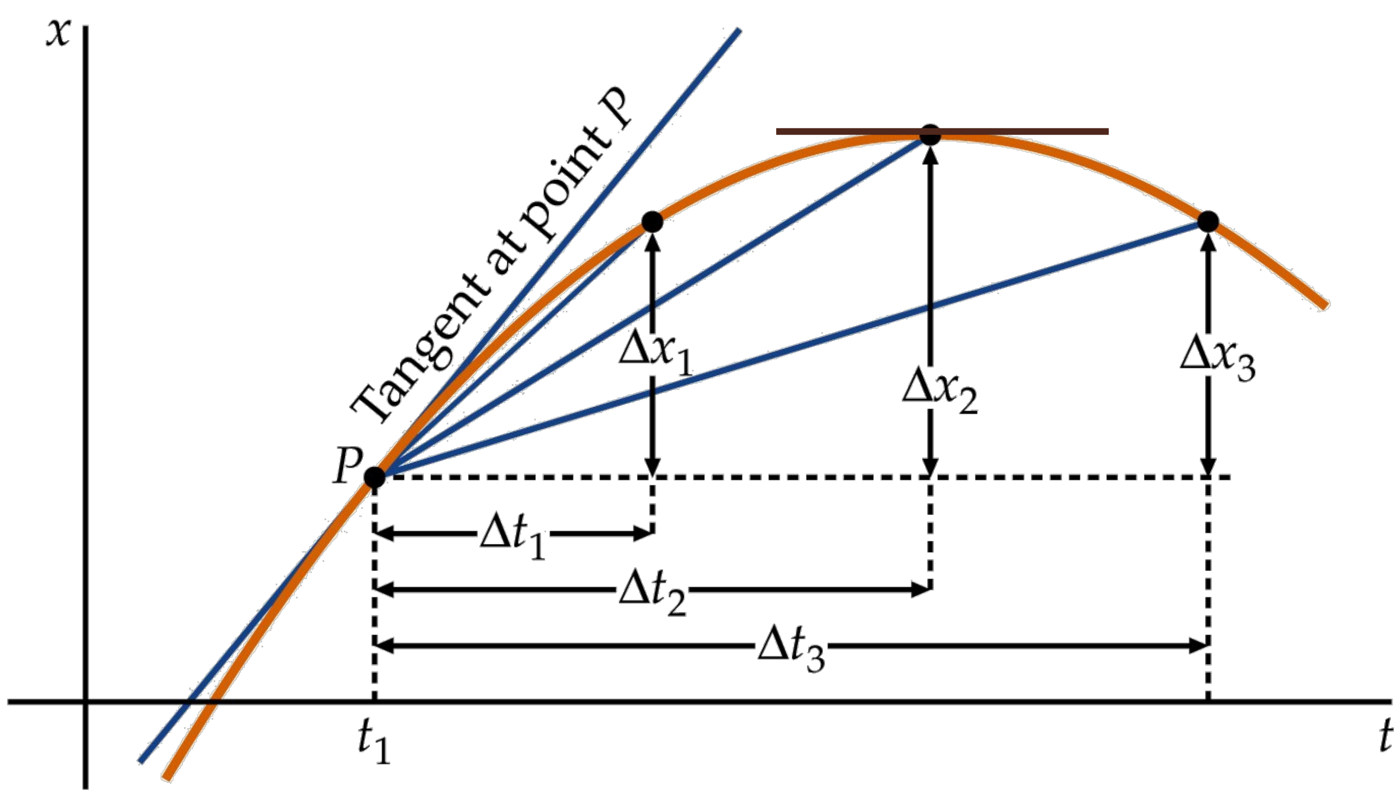
x

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \int v\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}x \quad \rightarrow \Delta x = x - x_0 = \int v\mathrm{d}t$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \int a\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}v \quad \rightarrow \Delta v = v - v_0 = \int a\mathrm{d}t$$

2.2. Moviment en una línia recta

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$



2.2. Moviment en una línia recta

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \Delta v = \int a(\mathrm{t})\mathrm{d}t$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \Delta x = \int v\mathrm{d}t$$

2.2. Moviment en una línia recta

Acceleració depenent del temps:

Càlcul de la velocitat en funció del temps.

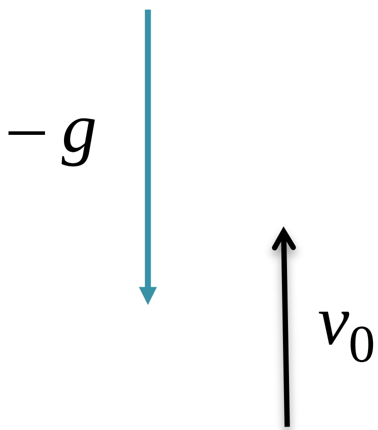
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(x)$$

Exemple: Moviment horitzontal amb acceleració variable

$$a = kt^3$$

2.2. Moviment en una línia recta

Moviment vertical amb acceleració constant



2.2. Moviment en una línia recta

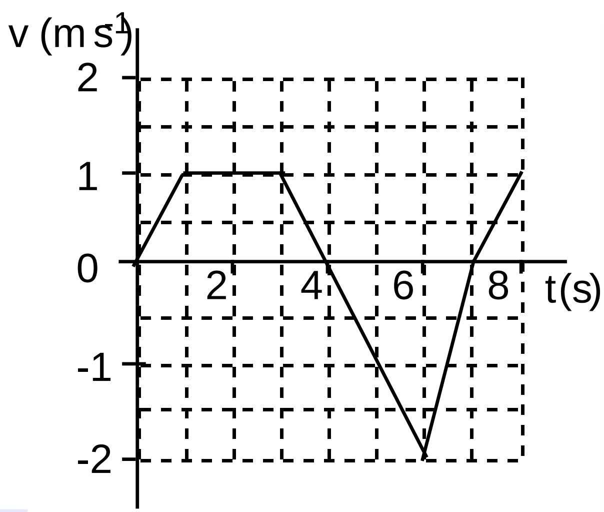
Problema

Un objecte es mou al llarg d'una línia recta. En l'instant inicial, l'objecte es troba en l'origen de coordenades, i després es posa en repòs; la seua velocitat en cada instant és la que es mostra en el gràfic. Hem de trobar

(a) L'acceleració en funció del temps,

(b) La posició en funció del temps,

(c) La distància total que ha recorregut.



2.2. Moviment en una línia recta

Acceleració depenent de la posició:

Càlcul de la velocitat en funció de la posició.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = a(x)$$

Regla de la cadena

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} v = a(x)$$

$$\int v\mathrm{d}v = \int a(x)\mathrm{d}x$$

Moviment en una línia recta

Acceleració depenent de la posició:

Exemple

$$a(x) = -bx \quad \rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bx$$

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -bx$$

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -b\int_{x_0}^{x} x\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}v^2\Big|_{v_0}^{v} = \frac{-b}{2}x^2\Big|_{x_0}^{x}$$

$$\boxed{v = \left[v_0^2 - b\left(x^2 - x_0^2\right)\right]^{1/2}}$$

Moviment en una línia recta

Una partícula que es troba inicialment en l'origen de coordenades amb velocitat *v*0, és frenada amb una força proporcional a la seua velocitat, de manera que F = - k v, on *k* és una constant.

Hem de trobar:

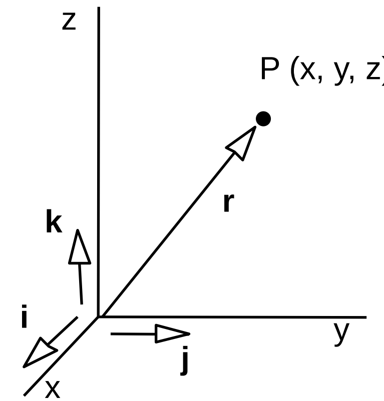
(a) la velocitat en funció del temps,

(b) la posició en funció del temps,

Moviment en un pla

Recordem que el vector posició en **<u>coordenades cartesianes</u>** és:

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



La velocitat:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{r}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}t}\vec{k} =$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

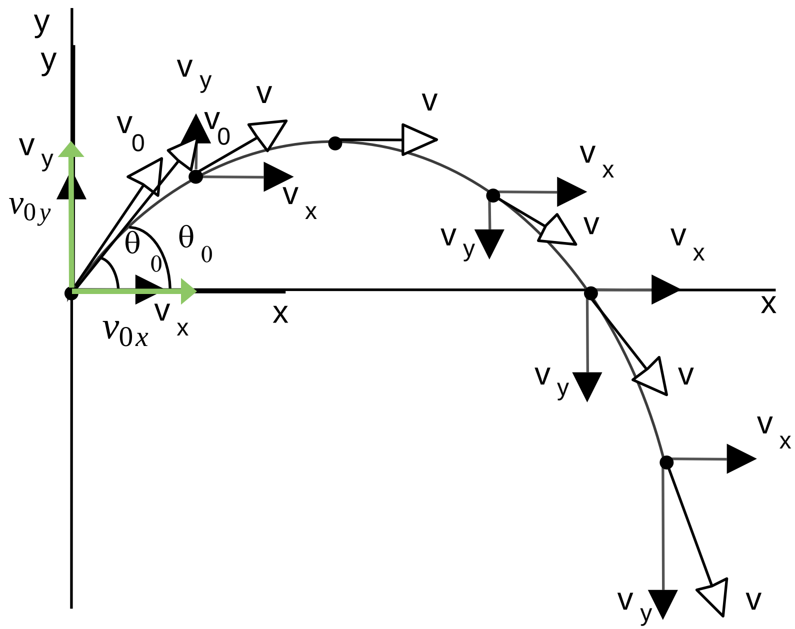
I l'acceleració

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

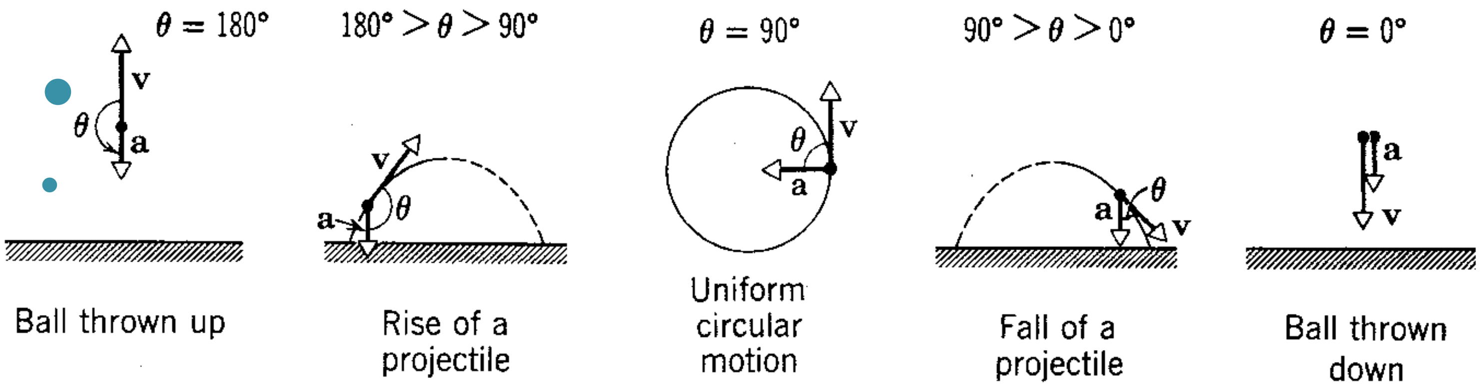
$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

2.3. Moviment en un pla

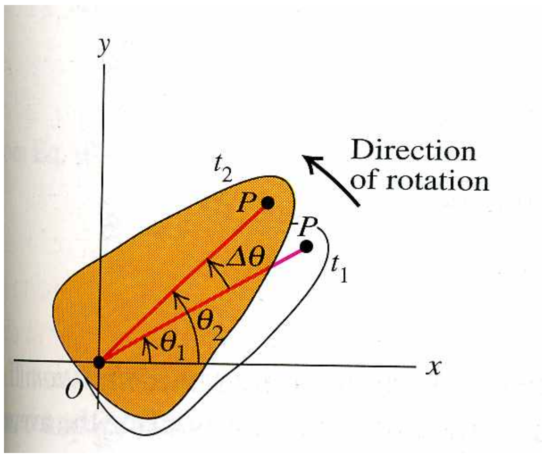
Moviment de projectils



Moviment en un pla



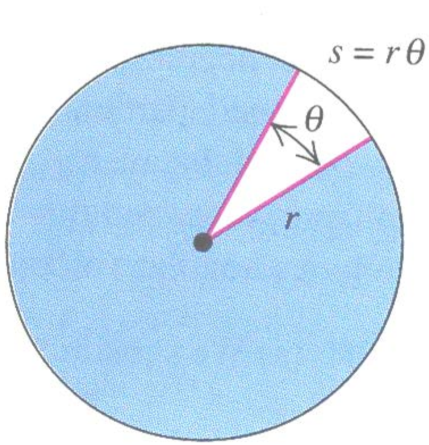
Moviment circular

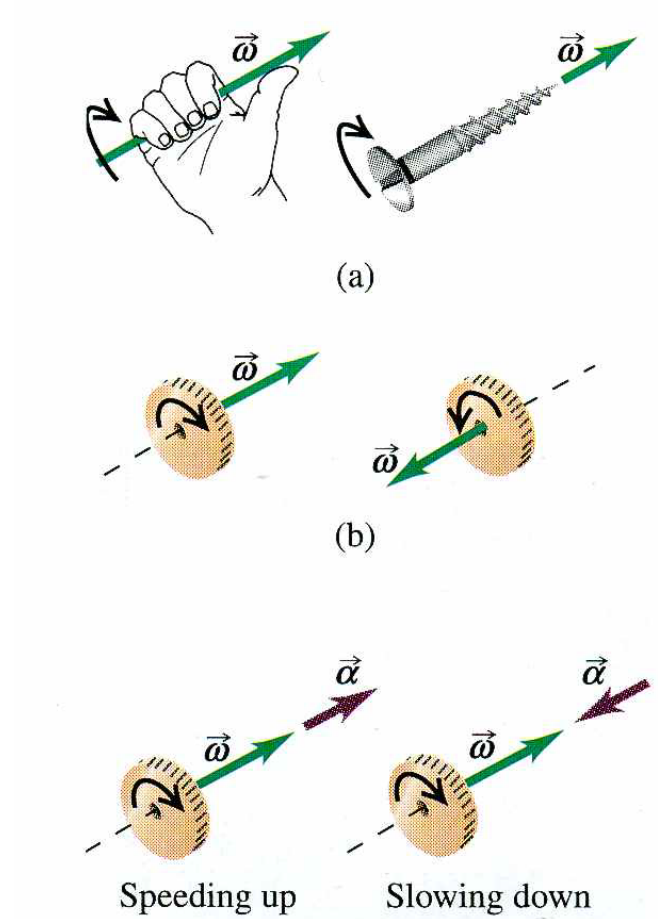


$$s = r\theta$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$





Moviment circular

Acceleració angular constant

COMPARISON OF LINEAR AND ANGULAR MOTION WITH CONSTANT ACCELERATION

STRAIGHT-LINE MOTION WITH CONSTANT LINEAR ACCELERATION	FIXED-AXIS ROTATION WITH CONSTANT ANGULAR ACCELERATION
$a = \text{constant}$	$\alpha = \text{constant}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

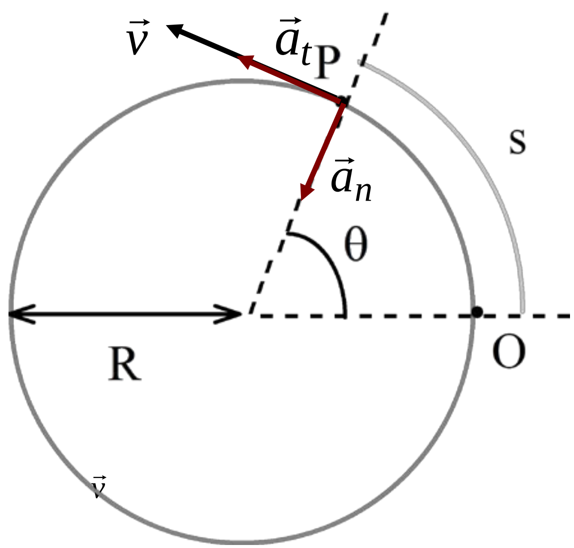
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$

Moviment circular

Variables importants en el moviment circular: $\begin{cases} \theta \\ \omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ \alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \end{cases}$ Mov. linial: $\begin{cases} x \\ v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{cases}$



$$s = R\theta$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

Sols si α és constant s'acomplirà $\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$

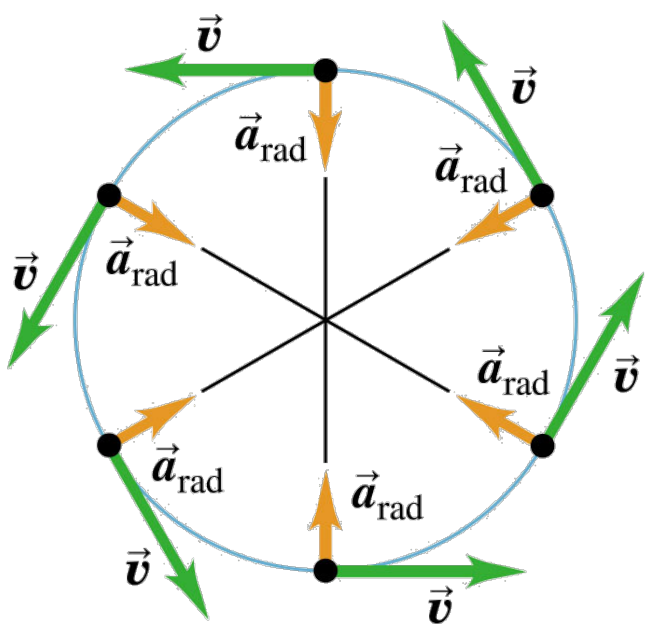
Moviment circular

- Cuando una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio R con rapidez constante v, tiene una aceleración de magnitud

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R}. \qquad (3\text{–}28)$$

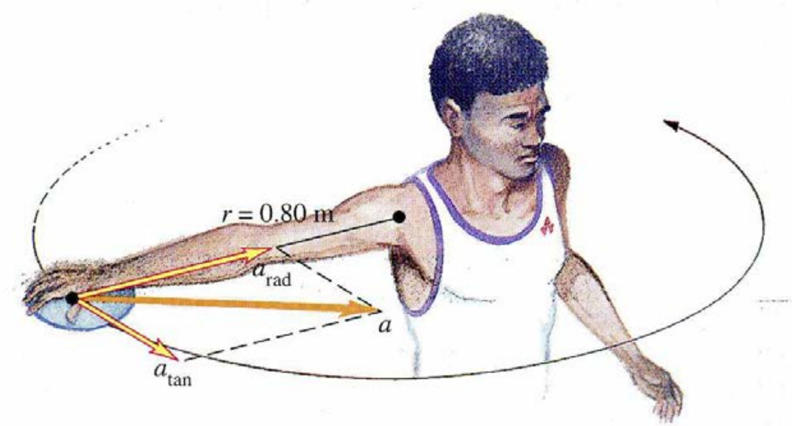
La aceleración siempre va dirigida hacia el centro del círculo y es perpendicular a $\vec{v}$. El periodo T de un movimiento circular es lo que tarda una revolución. Si la rapidez es constante, $v = 2\pi R / T$

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \qquad (3\text{–}30)$$



Moviment circular

Un llançador de disc gira amb acceleració angular $\alpha = 50$ rad/s^2, movent el disc en un cercle de radi $r = 0.8$ m. Si modelem el braç del llançador com un cos rígid tal que r és constant, calculeu la magnitud i les components tangencial i centrípeta de l'acceleració del disc en l'instant en què la velocitat angular és 10 rad/s.



Moviment circular

Problema

9 Dos partículas salen con la misma velocidad lineal v_0 pero con sentidos contrarios del mismo punto de la periferia de una circunferencia de radio R, estando ambas obligadas a moverse a lo largo de ésta. La partícula que sale hacia arriba experimenta una aceleración constante α en el mismo sentido que su movimiento. La otra lleva una aceleración del mismo módulo pero que se opone a su movimiento. Calcule:

a) El tiempo que tardan en chocar.

b) El valor de α para que el choque se produzca en el punto de partida.