Tema 1.
Vectors i càlculs

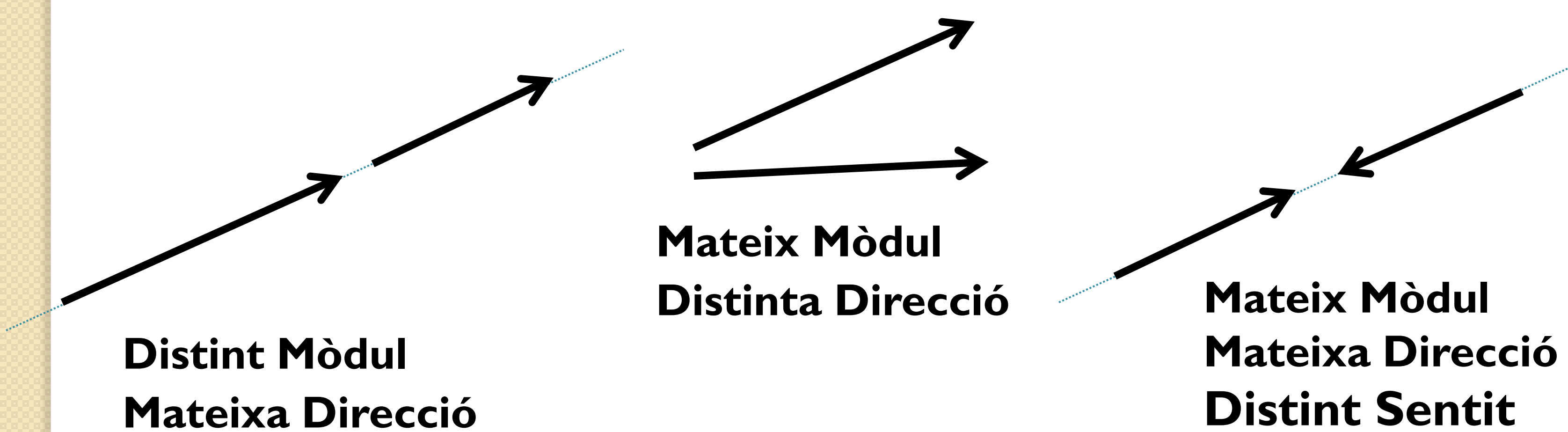
Propietats bàsiques de vectors. Operacions bàsiques amb vectors. Càlcul diferencial

Definicions

• **Escalars**: Ens matemàtic més simple, un nombre. En Física hi han moltes magnituds escalars com ara la massa, la pressió, el volum, l'energia, la temperatura... Aquestes magnituds venen representades per un escalar més les seues unitats

• **Vectors:** Una magnitud matemàtica que no es pot expressar només amb un nombre, ja que té mòdul, direcció i sentit. En física hi ha moltes magnituds vectorials com ara la posició, la velocitat, l'acceleració, la força, el camp...

Aquestes magnituds venen representades per un vector més les seues unitats



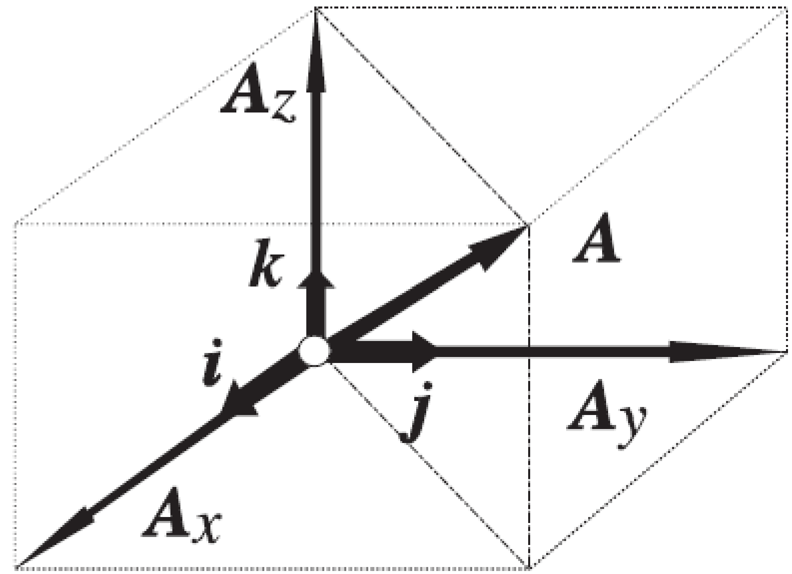
Definicions

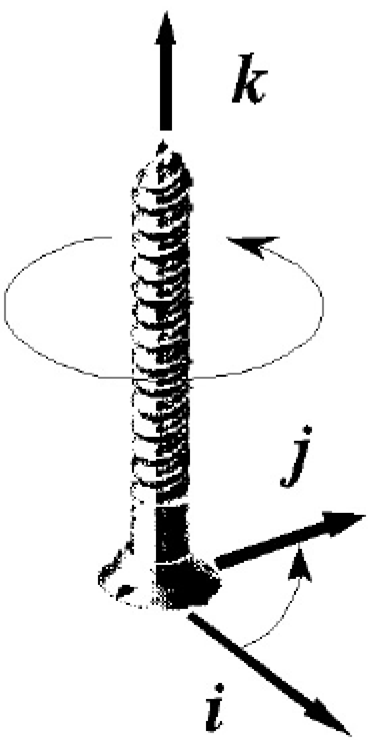
• **Notació Vectorial:** Al llarg d'aquesta assignatura representarem un vector de varies formes,

$\mathbf{A}$	$\vec{r}$	$\overrightarrow{MN}$
Amb Lletra Negreta	**Amb una fletxa dalt**	**Considerant el punt d'origen i el punt final**

Sistema de Referencia

- **Sistema de Referència:** Donades tres rectes concurrents no coplanàries sempre és possible descompondre un vector donat **A** en tres vectors, A_1, A_2, i A_3, de manera que cadascun d'ells siga paral·lel a una de les tres rectes donades, i que sumats tinguen al vector **A** com a resultant.





- **Sistema de Referència Cartesia:** Sistema de referència en el que les tres rectes són mutuament perpendiculars. La base del sistema es tria utilitzant la regla del cargol. Les components cartesianes són el escalars, A_x, A_y, i A_z, pels que se han de multiplicar els vectors unitaris:

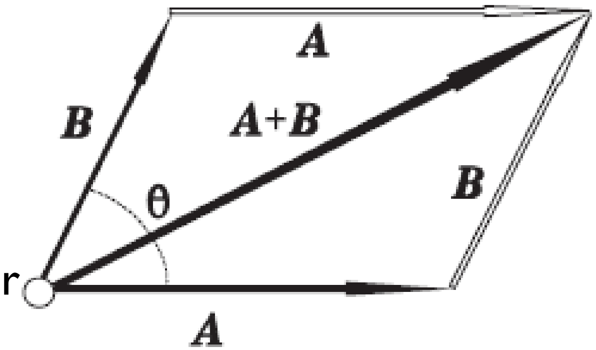
$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

- El mòdul d'un vector és troba fàcilment a partir de les components:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Suma de Vectors

• **Suma de Vectors:** Donats dos vectors **A** i **B**, anomenen suma, i la designarem per **A+B**, al vector obtingut com a diagonal del paral·lelogram format pels vectors **A** i **B**. Evidentment, el mateix resultat s'obté si se situen els vectors un a continuació d'un altre i es defineix la suma de tots dos com el vector que va des de l'origen del primer a l'extrem del segon.



• **Propietats de la Suma:**

(1) Propietat commutativa: **A+B=B+A**

(2) Propietat associativa: (**A+B**)+**C**=**A**+(**B+C**) [1.2]

(3) Existència del vector oposat: **A**+(-**A**)=0

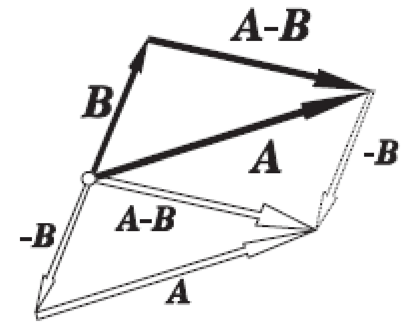
(4) En virtut del teorema del cosinus, el mòdul de la suma és:

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

sent θ l'angle que formen entre si les adreces dels vectors A i B.

Diferència de Vectors

• **Diferència de Vectors:** Donats dos vectors **A** i **B**, definim la diferència entre el primer i el segon, i la designem per **A-B**, com el vector obtingut com suma del vector **A** amb el vector oposat de **B** (mateix mòdul i direcció, però sentit oposat) :



A-B=**A**+(**-B**)

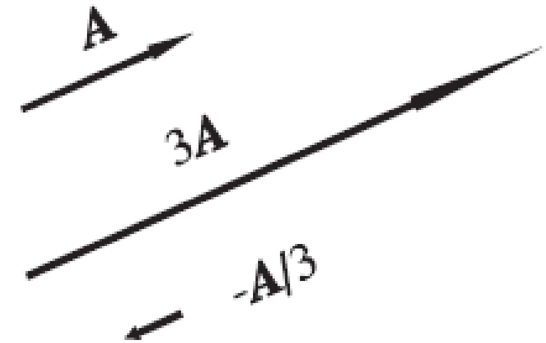
• Si portem els vectors A i B a un mateix origen, el vector A - B és el que va des de l'extrem de B a l'extrem de A, i el seu mòdul ve donat per:

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

sent θ l'angle que formen entre si les direccions dels vectors A i B.

Producte d'un Vector per un Escalar

- **Producte d'un Vector per un Escalar:** Donat un escalar p i un vector **A**, anomenarem producte dels dos, i ho representarem per p**A**, a un vector el mòdul del qual és el producte del valor absolut de l'escalar p pel mòdul del vector **A**, de la mateixa direcció que el vector **A** i de sentit coincident o oposat al del vector **A** segons que l'escalar p sigui positiu o negatiu.



- Aquest producte tenen les següents propietats:

(1) Propietat associativa: p(q**A**)=(pq)**A**=q(p**A**)
(2) Propietat distributiva respecte a la suma d'escalars: (p+q)**A**=p**A**+q**A**
(3) Propietat distributiva respecte a la suma de vectors: p(**A**+**B**)=p**A**+p**B**

- El quocient d'un vector per un escalar és, per definició, el producte del vector A per l'escalar 1/p, de manera que:

$$\frac{\vec{A}}{p} = \frac{1}{p}\vec{A}$$

- **Vector Unitari:** Vector de mòdul 1.

$$\vec{e}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Suma, rest i multiplicació per escalar amb components

- **Suma:**

$$\vec{A}+\vec{B}=\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)+\left(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\right)=$$
$$=\left(A_x+B_x\right)\vec{i}+\left(A_y+B_y\right)\vec{j}+\left(A_z+B_z\right)\vec{k}$$

- **Resta:**

$$\vec{A}-\vec{B}=\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)-\left(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\right)=$$
$$=\left(A_x-B_x\right)\vec{i}+\left(A_y-B_y\right)\vec{j}+\left(A_z-B_z\right)\vec{k}$$

- **Multiplicació per un Escalar:**

$$p\vec{A}=p\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)=pA_x\vec{i}+pA_y\vec{j}+pA_z\vec{k}$$

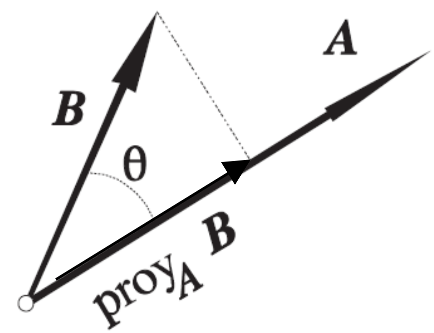
Producte Escalar

- **Producte Escalar:** és una multiplicació entre dos vectors que dóna com a resultat un escalar, està definida com:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\cos\theta$$

- També és pot definir com:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\cdot proy_{\vec{A}}\left(\vec{B}\right)$$



- Tenint en compte les seues propietats es pot demostrar que en components:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x\cdot B_x\right) + \left(A_y\cdot B_y\right) + \left(A_z\cdot B_z\right)$$

Propietats del Producte Escalar (I)

(1) Propietat commutativa: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

(2) Propietat distributiva respecte a la suma vectorial: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$

(3) Propietat associativa respecte al producte per un escalar:
$p(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (p\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (p\mathbf{B})$

(4) Ja que $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ no s'ha definit (el signe s'usa només entre vectors) la propietat associativa no escau a considerar-la. Observe's, no obstant açò, que en general: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\, \mathbf{C} \neq \mathbf{A}\, (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

(5) Si els vectors A i B són perpendiculars entre si, serà cos θ=0, i resulta
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$
Aquesta relació expressa la condició de perpendicularitat entre dos vectors. Observe's, que el producte escalar de dos vectors pot ser nul sense que el siguen cap dels vector.
En particular, per als vectors cartesians **i**, **j**, *k*, tenim

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$
$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$

Propietats del Producte Escalar (II)

(6) Angle format per dos vectors: De la definició del producte escalar se segueix:

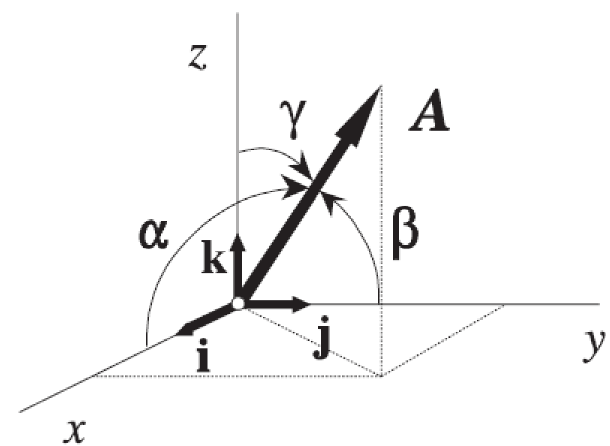
$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \vec{e}_{\vec{A}}\cdot\vec{e}_{\vec{B}}$$

(7) Cosinus directors: Es diuen cosinus directors als cosinus dels angles directors formats pel vector amb els eixos de coordenades. Tenim:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{i}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{j}}{|\vec{A}|} = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{A}\cdot\vec{k}}{|\vec{A}|} = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$



suma dels quadrats dels cosinus directors és igual a la unitat; açò és,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

(8) El producte escalar de dos vectors no tenen operació inversa; açò és, si **A** · **X** = c, no existeix una solució única per a **X**. Dividir per un vector és una operació sense definir i freturosa de sentit.

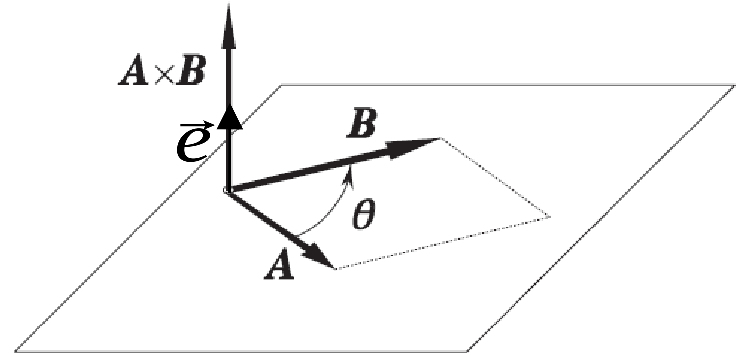
Propietats del Producte Escalar (II)

Trobeu l'angle θ format pels vectors

$$\mathbf{p} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{q} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Producte Vectorial

• **Producte Vectorial:** és una multiplicació entre dos vectors que dóna com a resultat un vector perpendicular al pla format pels vectors que es multipliquen vectorialment:

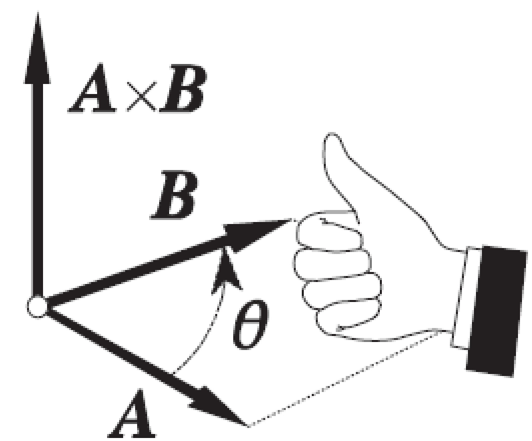


$$\vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cdot \sin\theta \, \vec{e}$$

On **e** és un vector unitari perpendicular al pla format per **A** i **B**. Es trivial deduir que el mòdul del vector producte vectorial ve donat per:

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cdot \sin\theta$$

• Per a trobar el sentit de **A**x**B** s'utilitza la regla de la ma dreta



Propietats del Producte Vectorial (I)

(1) Propietat anticonmutatives: $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

(2) Propietat distributiva respecte a la suma vectorial:
$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$

(3) Propietat associativa respecte al producte per un escalar:
$p(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(p\mathbf{A})\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times(p\mathbf{B})$

(4) No té la propietat associativa; açò és, en general serà
$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$

(5) Si els vectors A i B són mútuament paral·lels, llavors, per ser sen $\theta=0$, serà $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$
relació que expressa la condició de paral·lelisme entre dos vectors. El producte vectorial de dos vectors pot ser nul sense que el siga cap d'ells.

(6) En particular, per als *versores i, j, k, tenim

$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0 \quad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{j}$
$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k} \quad \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0 \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$
$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i} \quad \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$

Propietats del Producte Vectorial (II)

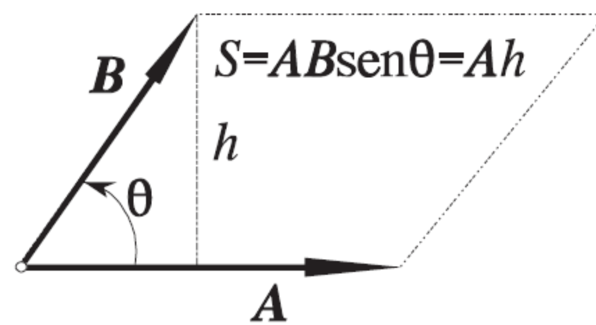
(7) Producte Vectorial amb les components del vector:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=$$

$$=A_yB_z\vec{i}+A_xB_y\vec{k}+A_zB_x\vec{j}-\left(A_yB_x\vec{k}+A_xB_z\vec{j}+A_zB_y\vec{i}\right)=$$

$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{i}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\vec{j}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{k}$$

(8) El mòdul del producte vectorial **A×B** representa l'àrea del paral·lelogram determinat pels vectors **A** i **B**.



(9) El producte vectorial no té operació inversa; açò és, si **A×X**=C, no existeix una solució única per a **X.** Dividir per un vector és una operació sense definir i freturosa de sentit

Producte vectorial

Trobeu un vector unitari perpendicular al pla definit pels vectors

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \ \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Càlcul diferencial

El càlcul diferencial o dit d'un altra manera, saber fer derivades i integrals, i el càlcul vectorial són eines fonamentals en el desenvolupament de l'assignatura que es van impartir durant les assignatures lligades al batxillerat científic. Són per tant eines que s'ha de dominar per poder progressar adequadament durant el curs i que es suposa conegudes.

Llibre per repassar (o aprendre a fer integrals)
Fernando Coquillat "Càlculo Integral: Metodologia y problemas" Ed. Tebar Flores.

Càlcul diferencial i integral

CÁLCULO

Derivadas:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\ ax = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{a}{x}$$

Integrales:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Series de potencias (convergentes para el intervalo de x mostrado):

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1):$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (\text{toda } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (\text{toda } x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad (|x| < \pi/2)$$

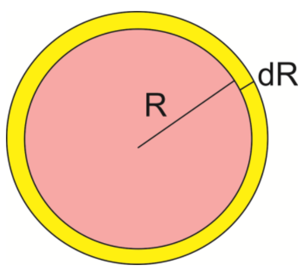
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (\text{toda } x)$$

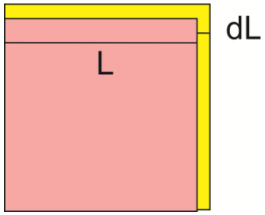
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Significació de la derivada

El diferencial

$$dA = \left(\frac{dA}{dR}\right) dR$$





$$A = \pi R^2$$

$$dA = (2\pi R)dR$$

$$A = L^2$$

$$dA = (2L)dL$$

Significació de la derivada

La derivada com a tangent

Esta interpretació permet relacionar la velocitat amb la posició

$$v = \frac{dx}{dt}$$

La força amb el potencial

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

I semblantment moltes altres quantitats físiques

Camp Escalar i Camp Vectorial

• Camp escalar: Tota funció que faça correspondre a cada punt de l'espai el valor d'una magnitud escalar defineix un camp escalar. Com a exemples de camps escalars tenim els camps de temperatura, de pressió, de densitat...

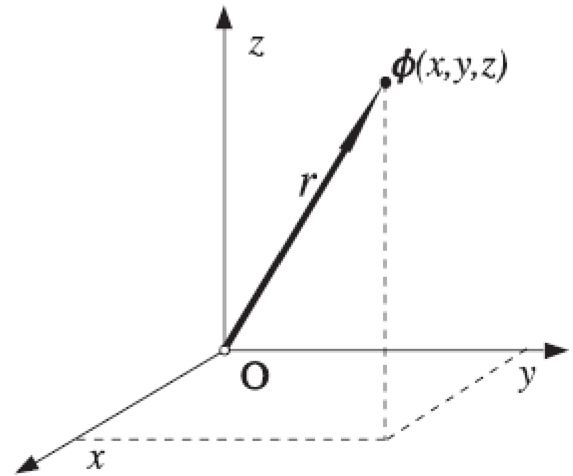
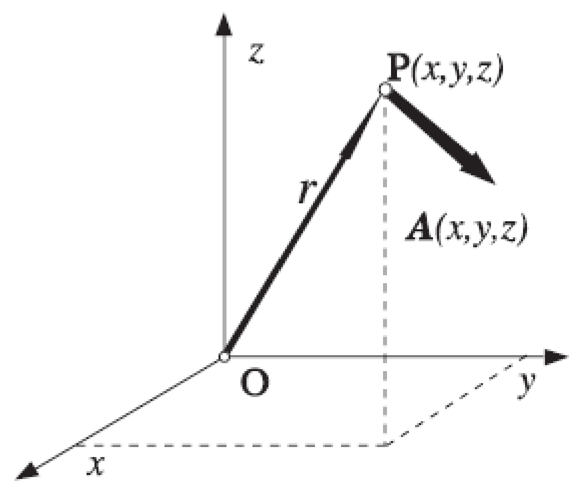


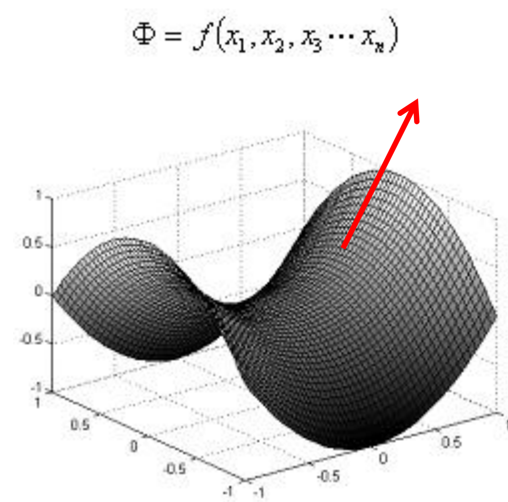
Figura 3.1

• **Camp vectorial:** Tota funció que faça correspondre a cada punt de l'espai el valor d'una magnitud vectorial, açò és, un vector, defineix un camp vectorial. Com a exemples de camps vectorials tenim el camp gravitatori, l'elèctric, el magnètic, el de velocitats en un corrent fluït...



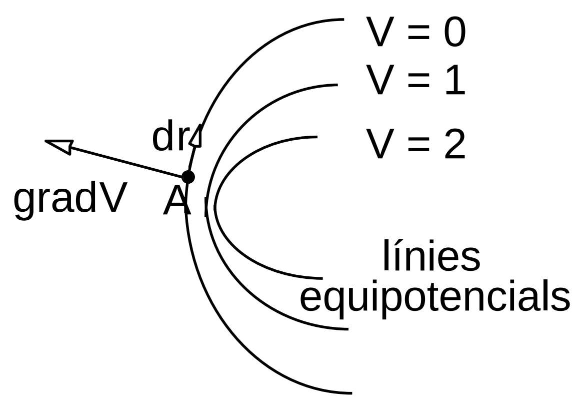
Gradient d'un Escalar.

• Donat el camp escalar f(x,y,z), el vector **gradient** $\vec{\nabla}$f(x,y,z) indica la direcció en la qual el camp f varia més ràpidament i el seu mòdul representa el ritme de variació de f en direcció d'aquest vector gradient.



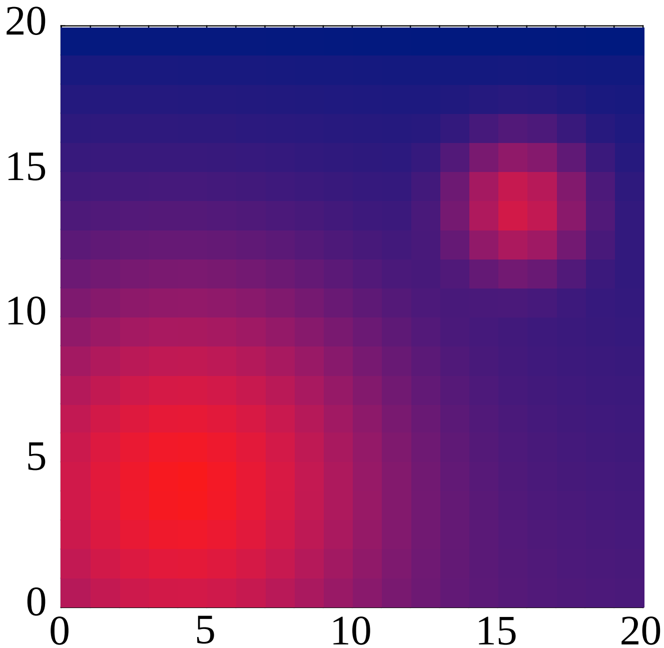
$$\vec{\nabla} f = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial f}{\partial z}$$

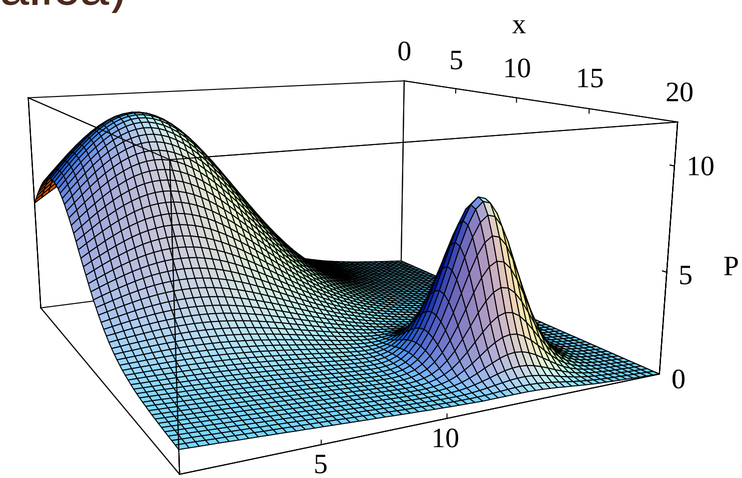
En general el gradient és la direcció perpendicular a les corbes equipotencials



. Força i energia potencial

Siga una funció escalar T(x,y)
(com la temperatura en una placa metàlica)





El gradient de la funció dona les linies de flux

$$\mathbf{Flux} = k\nabla T(x,y) = k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{j}\right)$$