

---

# Introducció a l'experimentació

---

Germà Garcia Belmonte i Juan Bisquert  
Universitat Jaume I de Castelló

María Jesús Hernández  
Universitat de València

Salvador Bal·le  
Universitat de les Illes Balears

Lluís Mañosa  
Universitat de Barcelona



Publicacions Universitat Jaume I  
1999, ISBN 84-8021-283-7



---

# Continguts

---

<b>Introducció a l'experimentació</b> .....	<b>i</b>
<b>Continguts</b> .....	<b>iii</b>
<b>Prefaci</b> .....	<b>v</b>
<b>Idees generals i terminologia</b> .....	<b>1</b>
1.1 Obrim les portes del laboratori .....	1
1.2 La mesura i el procés experimental.....	3
1.3 L'estructura dels instruments de mesura.....	5
1.4 L'experimentació i l'ús dels models .....	6
<b>Mesura i concepte d'incertesa</b> .....	<b>10</b>
2.1 L'exactitud de la mesura i la idea d'error aleatori .....	10
2.2 Representació estadística de les mesures .....	13
2.3 Error sistemàtic.....	17
2.4 Concepte d'incertesa .....	19
<i>A Error absolut</i> .....	20
<i>B Error relatiu</i> .....	20
2.5 Escriptura de resultats de mesures amb la seua incertesa .....	21
Problemes .....	22
<b>Propagació d'errors</b> .....	<b>24</b>
3.1 Errors de propagació lineal .....	24
<i>A Mètode de les derivades parcials</i> .....	24
<i>B Mètode dels logaritmes</i> .....	26
<i>C Mètode d'estimació numèrica</i> .....	27
3.2 Errors de propagació quadràtica.....	28
Problemes .....	29
<b>Incertesa en mesures directes</b> .....	<b>31</b>
4.1. Criteris genèrics d'atribució d'incertesa .....	31
4.2 Incertesa instrumental.....	34
4.3 Múltiples mesures d'una quantitat .....	36
<i>A La distribució límit</i> .....	37
<i>B Estimació de paràmetres amb un conjunt finit de dades</i> .....	40
<i>C Propagació de desviacions estàndard</i> .....	41
<i>D Error estàndard de la mitjana</i> .....	43

---

4.4	Quan el nombre de mesures és petit .....	45
	Problemes.....	45
<b>Mètodes d'ajust d'un conjunt de punts a una funció .....</b>		<b>47</b>
5.1	La validació de models i la determinació de paràmetres.....	47
	<i>A Modelatge amb relacions analítiques .....</i>	<i>47</i>
	<i>B El problema general de l'ajust.....</i>	<i>50</i>
5.2	Regressió lineal.....	51
	<i>A Càlcul dels paràmetres de la regressió.....</i>	<i>51</i>
	<i>B Error dels paràmetres de regressió.....</i>	<i>52</i>
	<i>C Realització de l'ajust amb l'ordinador .....</i>	<i>53</i>
	<i>D Aplicació de la regressió a altres funcions .....</i>	<i>55</i>
	Problemes.....	56
<b>Mètodes d'aproximació de dades .....</b>		<b>58</b>
6.1	Interpolació .....	58
6.2	Determinació de la derivada .....	60
<b>Documentació i comunicació del experiments .....</b>		<b>62</b>
7.1	Elaboració de memòries i publicacions .....	62
	<i>A Notes experimentals.....</i>	<i>62</i>
	<i>B El report experimental.....</i>	<i>63</i>
7.2	Taules .....	68
7.3	Gràfics .....	69
	<i>A Els eixos .....</i>	<i>70</i>
	<i>B Els punts experimentals.....</i>	<i>71</i>
	<i>C La corba contínua.....</i>	<i>72</i>
	<i>D El peu de figura .....</i>	<i>73</i>
	Problemes.....	76
<b>Constants físiques i factors de conversió.....</b>		<b>78</b>
<b>Resum de fórmules i procediments .....</b>		<b>79</b>
<b>Solucions als problemes .....</b>		<b>81</b>
<b>Bibliografia.....</b>		<b>84</b>
<b>Índex .....</b>		<b>85</b>

---

# Prefaci

---

Les ciències experimentals i les tecnologies es sostenen sobre una base empírica. L'aprenentatge dels procediments lligats a l'activitat experimental —el disseny i realització d'experiments, la manipulació, anàlisi i interpretació de les dades— constitueix un aspecte central de la formació de científics i enginyers. Molts d'aquests procediments han mantingut una relativa estabilitat durant els segles d'història de la ciència i les aplicacions. Alhora, una sèrie de novetats s'han escampat en els darrers anys fins a abastar la majoria de camps i disciplines: la miniaturització de dispositius, el baix cost dels instruments electrònics, l'utilització d'ordinadors, permeten arreplegar grans quantitats de dades en temps curts. La informació sobre resultats flou amb lleugeresa; els temes d'interès canvien ràpidament.

Aquest llibre presenta una visió sumària i actualitzada dels procediments bàsics de l'experimentació científic-tècnica. Normalment aquestes coses s'aprenen en el laboratori, en contacte amb la instrumentació i els dispositius, realitzant experiments senzills sota el guiatge d'experts. En aquest context, el material s'ha triat amb un doble propòsit. El primer és assenyalar i descriure els aspectes més importants de la vida en el laboratori i el món que l'envolta. Amb això esperem que l'estudiant predrà coneixement de bell antuvi dels fenòmens recurrents en les tasques experimentals i les habilitats que necessitarà per a tractar-los; des de la presència ubíqua de fluctuacions erràtiques en les dades enregistrades, fins a la confecció d'un text publicable.

La segona finalitat del llibre és proporcionar una introducció a les tècniques de tractament de dades i anàlisi d'errors més comunament utilitzades pels experimentadors. En aquest respecte hem adoptat una postura pragmàtica, buscant la senzillesa de presentació. L'estudiant podrà tastar els principals conceptes i veure la seua aplicació en alguns casos, adquirint prou competència com per a desimbolde's amb pràctiques de laboratori en cursos introductoris. Tanmateix, no hem fet aquí cap intent de catalogar les diverses tècniques i criteris disponibles, ni de justificar rigorosament els desenvolupaments matemàtics. Això quedarà per a d'altres texts més específicament adaptats a les necessitats concretes de cadascú.

Els procediments proposats s'han condensat en un Apèndix com a ajut per a referència ràpida. També donem en un altre Apèndix les principals constants físiques i alguns factors de conversió. Hem utilitzat generalment les unitats del Sistema Internacional (SI), encara que a voltes recurrim a

algunes unitats de CGS que encara perviuen. Utilitzem la coma decimal en l'escriptura de nombres segons el conveni del SI i la tradició de les llengües llatines. Amb tot, s'hauria d'assenyalar que l'ús del *punt* decimal és més pràctic i efectiu en el tractament de dades, encara que només siga per la simple raó que la majoria de software científic entén el punt i no la coma.

Volem agrair la col·laboració de Fran Fabregat, i el suport i els comentaris de Vicent Climent, Beatriz Gallardo, Jesús Lancis, i de moltíssims altres companys amb qui hem discutit durant molt de temps els temes presentats aquí. J. B. i G. G. B. volen també agrair una beca del Servei de Llengües i Terminologia de la Universitat Jaume I, que ha fet possible aquest llibre.

# Idees generals i terminologia

---

## 1.1 Obrim les portes del laboratori

Les imatges que posseïm de la idea mesura, del treball de laboratori o de la manipulació d'instruments solen correspondre's amb les visions col·lectives que configuren els nostres imaginaris culturals. Per força, quan pensem en un laboratori, ens vénen al cap màquines estranyes, amb llums que s'encenen i s'apaguen seguint combinacions i ritmes indesxifrables, espurnes que salten, calderes que contenen qui sap quins líquids bullint ... sense que des de fora puguem comprendre res del que està passant. Ens ve a la memòria el laboratori del Dr. Frankenstein que, sense dubte, és la novel·la on s'ha creat la imatge de què parlem. Els laboratoris, encara que no vulguem, fan por. Tanmateix, ¿realment un laboratori és això? ¿És un lloc per a iniciats en què només el coneixement de certs codis ens deixarà participar-hi? ¿Una mena de soterrani d'alquimista on res no és el que pareix?

És clar que el fet de començar a treballar en un laboratori condiciona d'entrada la persona que s'hi vol dedicar. Podem dir que, per a posar-s'hi, caldria perdre-li el respecte, en el bon sentit de l'expressió. Una bona manera d'introduir-se en les pràctiques experimentals pot ser conscienciar-nos de la presència quotidiana d'allò que hem anomenat «el laboratori». Qualsevol artefacte, dispositiu o màquina (penseu en un cotxe, un ordinador personal o un aparell de televisió, però també en coses sense aspecte de màquina: una aspirina per exemple) és en realitat un laboratori fora de lloc. És un laboratori en el sentit que pot efectuar canvis (materials o d'informació) amb elements del món, exactament igual que fem quan treballem en un laboratori entès com a espai físic d'un edifici. La diferència consisteix en el diferent grau de llibertat que, en un cas i en l'altre, té qui està manipulat els aparells. Mentre que amb els dispositius quotidians les possibilitats d'alterar el que es pot fer són certament limitades: no podem canviar els programes de la rentadora, posem per cas; en un laboratori l'experimentador fa una tria conscient dels procediments, dels tipus de materials que vol gastar o de les estratègies que en última instància vol seguir. Com sempre, tot és relatiu. Al laboratori la llibertat d'acció no és absoluta i tampoc no estem completament limitats a l'hora d'usar un telèfon. Siga com siga, hem de pensar que vivim

rodejats de laboratoris traslladats fora del seu lloc natural (els artefactes de qualsevol mena) que fan el que interessa i no unes altres coses. Per això no hauria de resultar estrany que ocupàrem part del nostre temps a conèixer un poc els indrets d'on ixen aquests objectes. El vincle entre els laboratoris i els artefactes (estem usant aquesta paraula amb un significat ampli: incloem des d'una aspirina, com hem dit adés, fins a una planxa elèctrica) és massa evident: els artefactes són procediments de laboratori condensats i estabilitzats perquè puguen repetir-se com es vulga. Ara bé, l'estabilització implica la impossibilitat, en certa mesura, d'eixir-se'n del programa.

Des d'un punt de vista pràctic, el requisit fonamental que hem de demanar a qualsevol màquina, artefacte o objecte artificial és la fiabilitat. D'alguna manera cal certificar que la màquina funcionarà com toca. Aquesta idea de certificació del funcionament correcte està relacionada amb una sèrie de conceptes propis de la Metrologia o ciència de la mesura: precisió, resolució, reproductibilitat, estandardització, classificació i limitació dels errors, ... que en última instància són els que estableixen la fiabilitat de la màquina sota prova. És a dir, les nocions que permeten donar per bo el funcionament d'un artefacte es basen en els conceptes que s'usen a l'hora de realitzar un mesurament.

Aquest text introductori a l'experimentació vol presentar alguns dels conceptes comuns, dels procediments habituals i de les estratègies típiques que fem servir en encarar-nos amb les tasques de laboratori. A pesar que aquests tipus de pràctiques són extremadament diverses, tant que canvien en funció del problema a què ens hi dediquem, hi ha un conjunt de procediments i d'idees que resulten ben profitosos perquè són d'abast general. A tall d'exemple en proposem uns quants amb una sèrie de preguntes:

¿Com es poden identificar i relacionar variables influents en la resolució d'un problema?

¿De quina manera puc traduir la relació entre variables del problema a un conjunt d'instruments de mesura connectats entre ells i amb els estímuls exteriors?

¿Com podem assegurar que la lectura de l'aparell correspon a la quantitat física triada?

¿Som capaços d'identificar errors sistemàtics i tenim idea de com evitar-los?

¿Com podem atribuir un error en la mesura per culpa de la imprecisió de l'instrument? ¿Hi ha més fonts d'error?

¿És possible diferenciar, donat un problema concret, entre l'error de la mesura i la dispersió intrínseca del procés físic que estem investigant?



¿Hi ha diferències substancials entre un instrument de mesura analògic i un altre de digital?

¿En què consisteixen les tècniques de tractament de dades i de què ens informen?

¿Podem establir el grau de fidelitat i de repetibilitat del sistema de mesura que hem muntat?

¿Quins són els procediments d'elaboració dels resultats després dels experiments i com s'han de comunicar les conclusions?

## 1.2 La mesura i el procés experimental

Com hem vist, és evident que la raó principal que explica i fonamenta la pràctica del treball de laboratori és senzillament la realització de mesuraments. Si ens adonem, la qüestió sembla extraordinàriament simple, en poques paraules: l'acció de mesurar consisteix simplement en la comparació entre dues coses —alçàries o llargàries, per usar termes coneguts; magnituds si parlem de manera general— que siguen de la mateixa espècie. L'exemple més adient d'aquesta idea de mesura com a comparació és l'ús de la balança: en efectuar una pesada efectivament anivellem els plats fins que igualem l'efecte d'un costat i de l'altre. D'altra banda, si volem conèixer, per exemple, les dimensions d'una certa peça, haurem de fer servir una altra peça amb què comparar. Aquesta peça de referència haurà estat prèviament calibrada, igual que hem calibrat els pesos de la balança. És a dir, el fet de mesurar implica en qualsevol cas l'acció prèvia del calibratge.

Siga com siga, ens haurem de posar d'acord sobre les condicions en què calibrem: s'hi haurà de definir un estàndard de mesura. Per tant, s'ha de tenir en compte que la realització d'un mesurament, de temperatura posem per cas amb un termòmetre de tub de mercuri (que són els més comuns), dóna per suposades una sèrie de coses. Aquesta *sèrie de coses*: tries, posades en comú, definicions dels procediments, ... definiran el calibratge i l'estàndard. En aquest cas concret, ¿com s'arriba a establir l'estàndard anomenat grau Celcius? Això, evidentment, resulta d'un acord entre persones. El procediment consisteix a dividir en cent parts la diferència d'altura que assoleix el mercuri d'un tub (el tub també ha de satisfer certes condicions) quan es submergeix en un bany de gel, d'una banda, i en aigua bullent, de l'altra (l'aigua no pot ser qualsevol, ha de satisfer certes restriccions). Cadascuna d'aquestes divisions representarà 1° C. Segons això, la definició d'un estàndard o el calibratge posterior comporta l'establiment d'un procediment, una espècie de recepta podríem dir. Per tant, el fet simple de realitzar una mesura (amb un termòmetre, un voltímetre o, senzillament, amb un regle) és en realitat un conjunt combinat de dues accions. Una d'evident

que fem en el mateix moment, la manipulació de l'aparell de mesura i la lectura del nombre corresponent, i una altra d'amagada, l'acció prèvia (en general tot un procés més o menys elaborat que incorpora tant coneixements teòrics com procediments pràctics) que ha fet possible la definició de l'estàndard.

D'altra banda, el resultat de la mesura —de la comparació com acabem de dir— sempre és una quantitat que s'expressa de manera numèrica. Així, fa una temperatura de 30° C (graus centígrads), l'avió està volant a una altura de 7000 m (metres), el senyal de carretera estableix un límit de 90 km h<sup>-1</sup> (quilòmetres per hora), la pressió atmosfèrica s'ha situat aquesta nit al voltant de 1024 mbar (milibars), la pila del comandament a distància és d'1,5 V (volts), per posar només alguns exemples quotidians. Vegeu que el resultat de l'acció de mesurar està format sempre per un parell de coses: una quantitat (un nombre) i una magnitud. Tal com hem indicat adés, el mesurament està determinat en realitat per dues accions: la manipulació de l'instrument i el procés anterior que ha permès construir-lo (calibrar-lo). Segons això, és ben natural que el resultat de qualsevol mesura estiga també format per un conjunt de dues coses, el parell quantitat/magnitud: la quantitat numèrica en resultarà de la manipulació (fer girar la roda d'un freqüencímetre, comptar el temps amb un cronòmetre, llegir un amperímetre, etc.) i la magnitud tindrà el seu referent en les accions que permeten l'estandardització (calibratge). Vegem-ho amb un altre exemple prou aclaridor: volem mesurar la pressió de les rodes del nostre cotxe, com és ben sabut hem de posar en contacte l'aparell de mesura i la cambra (el pneumàtic) per mitjà d'un tub flexible. Després observem que l'agulla de l'indicador es desplaça fins una certa posició i llegim, per exemple, 2,1 kg cm<sup>-2</sup>. Decidim que les rodes estan bé i ens n'anem. Doncs bé, encara que aquesta cadena d'accions siga ben rutinària, hem de ser conscients que sota l'aparença simple del procediment hi ha tota una col·lecció d'idees, coneixements, formes d'actuar i materials que es fan servir (en conjunt el que anomenem una tecnologia), que fa possible la definició d'un estàndard i consegüentment d'una mesura. Fixem-nos que, per exemple en física, una magnitud només queda definida en el moment de fixar un patró (estàndard) i establir els procediments per a mesurar-la.

Les idees bàsiques que hem fet servir i que fonamenten el concepte de mesurament són les següents:

- El mesurament és sempre un *procés experimental* en què intervenen aparells o instruments.
- El mesurament implica un conjunt de *dos* procediments. Un d'actual, que permet l'obtenció d'un valor numèric que representa la quantitat que

mesurem, i un altre d'anterior, tot el procés de *estandardització* i *calibratge*.

- El resultat d'un mesurament estarà format sempre per *un nombre i una magnitud*, relacionats cadascun d'ells amb els dos procediments que hem indicat adés. (Tal com veurem més endavant, el resultat no és només un nombre sinó que és un nombre acompanyat del seu grau de fiabilitat o *error*.)

### 1.3 L'estructura dels instruments de mesura

El procés de mesura per mitjà d'un instrument comporta sempre tres accions sense les quals no tindria sentit: la captació de la informació o adquisició, el processament i la presentació de les dades. Aquests tres processos van encadenats de manera que l'instrument efectua l'un darrere de l'altre, és a dir, primer adquireix, després processa i per últim, presenta les dades. És per això que aquesta configuració en cascada (un bloc d'accions darrere de l'altre) s'anomena *cadena de mesura*. En els instruments de mesura moderns sempre es fan servir magnituds elèctriques com a portadors de la informació perquè són les més senzilles de manipular. Evidentment, hi ha aparells de mesura encara en ús en què no hi intervé cap magnitud elèctrica: la balança de plats o el termòmetre de tub de mercuri dels quals hem parlat adés en són bons exemples. Tanmateix, la divisió del procés de mesura en tres parts encadenades segueix sent vàlida.

El primer dels elements de la cadena de mesura el configuren els *sensors* (a vegades també s'anomenen sondes o transductors). Un sensor no és més que un traductor: és sensible a la magnitud que es vol mesurar de manera que proporciona un senyal elèctric (habitualment un voltatge) que depèn de l'estímul exterior. Per exemple, un sensor de temperatura és un dispositiu amb una entrada i una eixida. L'entrada correspon a la variable sota mesura (la temperatura en aquest cas) i l'eixida és una funció (un voltatge elèctric) de l'entrada  $v(T)$ , on  $v$  representa el voltatge i  $T$  la temperatura. Com és normal, tant el voltatge d'eixida del sensor com l'estímul d'entrada poden ser funcions del temps,  $T(t)$  i  $v(t)$ . Si la temperatura canvia en l'exterior en un cert instant també es modificarà el voltatge. Doncs bé, la conversió que acabem d'explicar entre magnitud mesurable i senyal elèctric rep el nom d'adquisició o de captació de senyal. Els sensors de certes magnituds físiques posseeixen noms especials: per exemple un micròfon és un sensor de pressió sensible a les ones sonores, una cèl·lula fotoelèctrica és un tipus de sensor de llum, un termistor és un sensor de temperatura amb certes característiques... Evidentment també hi ha sensors que responen a magnituds que ja són de naturalesa elèctrica, per exemple les sondes de l'oscil·loscopi.

Després de l'adquisició ve el bloc de processament del senyal elèctric. Sense massa detalls podem dir que és la part de l'instrument de mesura en què es condiciona el senyal per tal d'enviar-lo al bloc de presentació de les dades. Hi ocorren coses com ara amplificar, filtrar o calcular. Penseu, per exemple, en els canvis que es produeixen en el so que emeten els altaveus d'un equip d'àudio (una cadena de música) quan canvien les posicions de l'equalitzador: donem més greus o aguts, o el que és el mateix, condicionem el senyal a través d'un filtratge.

Per últim, hi ha els dispositius de presentació de les dades. Es divideixen en dos grans grups: els *analògics* i els *digitals*. Si el senyal elèctric que prové del bloc de condicionament es torna a convertir en una longitud observable visualment en una escala graduada diem que la representació és analògica. Exemples d'això són la pantalla de l'oscil·loscopi o els indicadors d'agulla (per exemple el comptakilòmetres de la majoria dels cotxes). En aquests casos la posició de l'indicador en l'escala segueix contínuament les variacions de la magnitud mesurada. En canvi, un dispositiu de presentació de dades és digital si el que proporciona és una representació numèrica: senzillament s'hi pot llegir un nombre. És el cas dels multímetres o els freqüencímetres digitals. És evident que la lectura de l'indicador no pot canviar de manera ràpida, com era el cas dels indicadors analògics, perquè no tindríem temps de llegir-la. Ara la presentació es fa cada cert interval de temps establert prèviament de manera que la lectura siga còmoda.

Cada tipus de presentació, analògica o digital, té característiques especials que el fan interessant en certs usos. Per exemple, és molt més fàcil observar tendències en una representació analògica (una gràfica en funció del temps com és el cas dels oscil·loscopis), detectar màxims o mínims, fer-se una idea general de l'interval de variació d'una variable, que no mirant una llista de valors numèrics. En canvi, les representacions digitals són més exactes i permeten el tractament numèric posterior de les dades. És per això que molts instruments incorporen una presentació i l'altra.

#### **1.4 L'experimentació i l'ús dels models**

El principi de tota investigació, la motivació de la qual es parteix, és *l'existència d'un problema*, una qüestió nova o que no es comprén. Evidentment, el sorgiment d'aquest «problema» que no pot ser explicat, s'emmarca dins d'una teoria de coneixements vigents en aqueix moment. En fer una observació es para atenció amb una sèrie de variables determinades. Es desitja estudiar un fenomen concret, que no haja estat explicat prèviament, tenint en compte el cos de coneixements existent, o pel contrari, s'intenta conèixer i explicar el comportament d'un determinat fenomen que

no pot ser explicat per la teoria establerta. Per tant queda clar que la iniciació d'una activitat investigadora consisteix en el plantejament d'un problema, l'objectiu de l'estudi, i el coneixement de tota la teoria referent al tema. En qualsevol dels casos, és necessària una exhaustiva consulta bibliogràfica que permet conèixer tot el que es sap sobre el tema, per a analitzar la qüestió a partir d'aquest punt.

Per tant, veiem que l'experiment científic, sorgeix com a conseqüència d'un problema que es desitja estudiar, i el primer pas consisteix a *dissenyar l'experiment*, de manera que ens permeti obtenir informació concreta sobre el fenomen que estem tractant i comprovar les hipòtesis realitzades. Aquesta és una part important del procés, i pot ser la més creativa. Sempre és interessant disposar de diferents formes d'abordar l'experiment.

Però la simple mesura, per mitjà de certs procediments, d'alguna característica d'un fenomen natural no és prou especificació del que significa l'experimentació en termes generals. Mesurar només té sentit dins un context més ampli en què hem triat les propietats essencials del fenomen, la seua estructura i els seus paràmetres rellevants. Aquesta tria conscient de certs aspectes d'un fenomen i, alhora, la no consideració d'uns altres, comporta una simplificació del sistema que volem investigar. Per posar un exemple senzill, entendre una resistència com un dispositiu en què es satisfà la llei d'Ohm és, sense dubte, una simplificació de l'objecte real. Per la raó que siga, estem posant en primer pla aquest fet —la relació entre corrent i voltatge— i deixant de banda uns altres aspectes: la presència de soroll tèrmic, els efectes inductius o capacitius, les variacions de resistència amb la temperatura, ...

Aquesta especificació del context en què efectuem les mesures s'entén com la definició d'un *model* del fenomen. Una vegada establert, s'ha d'analitzar el problema, establir les condicions en les quals s'estudiarà, les simplificacions, les precisions, els camps de validesa, els possibles casos a estudiar, les condicions límits, etc. Les conclusions obtingudes estaran sempre limitades a les condicions precises establertes prèviament.

Quan presentem un model d'un sistema físic o químic, és a dir durant el procés de *modelatge*, cal tenir en compte uns quants aspectes que haviem de quedar determinats d'avançat:

- Les lleis físiques generals que governen els fenòmens i, consegüentment, les equacions matemàtiques del model.
- L'estructura del model, que descriu les parts del sistema i les seues relacions.
- Els paràmetres del model, és a dir, els coeficients que apareixen en les relacions matemàtiques.

- Les variables d'estat, que influeixen el sistema en conjunt i que el relacionen amb efectes exteriors.

Per exemple, en el cas d'un dispositiu que fa de resistència, el coneixement físic es descriu amb la llei d'Ohm; l'estructura correspon a un sistema elèctric biporta; el paràmetre és  $R$  i, a més, no considerem efectes exteriors com ara la humitat o la temperatura.

L'especificació d'un model, tal com hem explicat més amunt, no és una qüestió tancada. (Si fóra tancada no calia mesurar res.) Proposar un model no significa que el coneixement sobre el sistema és complet: hi ha aspectes indeterminats i, evidentment és en aquest moment que entren en joc els mesuraments.

Quan existeix un model àmpliament acceptat del fenomen que tractem, la indeterminació d'algun dels paràmetres del model (no tots) sol ser la situació més comuna: en l'exemple que estàvem gastant correspon al desconeixement del paràmetre  $R$  (només haurem de mesurar-lo amb un multímetre). En aquests casos l'estructura del model i les lleis que el governen es donen per bones, i els procediments de mesura solen estar ben definits i estandarditzats. El que fem és una *estimació* (determinació) del valor de certs paràmetres quan efectuem les mesures.

Però la situació pot ser més complexa si parts de l'estructura del model no són conegudes. L'experimentació es fa menys predeterminada com menys informació coneguem del sistema. En el cas en què hem de *construir* un model d'un fenomen, s'elaboren *hipòtesis científiques*, de forma que aquestes han de ser lògiques i susceptibles de comprovació (elles o les seues conseqüències). Aquestes hipòtesis seran confirmades o contrastades per diversos experiments científics. S'han de realitzar diversos experiments per a comprovar la coherència dels resultats i les hipòtesis.

La inadequació del model i l'evidència experimental, que es manifesta quan apareixen resultats inconsistents (per exemple si un paràmetre constant del model varia amb les condicions de l'experiment), ens farà questionar-nos la validesa del model (suposant que la metodologia de mesura siga impecable). Generalment existirà un defecte en la nostra comprensió del sistema, com ara algun efecte que no hem tingut en compte i que s'ha d'incloure en el model.

Però en el punt en què el model continua fallant després d'una anàlisi exhaustiva i l'aplicació de tècniques variades de mesura, la falta de correspondència entre el model i l'objecte pot assenyalar una limitació de les teories físiques en les quals fonamentàvem el model. D'aquesta manera, els experiments, o deduccions teòriques, poden corroborar una teoria científica i enriquir-la, o per contra, demostrar la seua no-validesa i refutar-la.

---

Tanmateix, s'ha de tenir en compte que experiments o resultats teòrics contradictoris sols donen lloc a un qüestionament de la teoria existent. Per tal que aquesta siga rebutjada, és necessari que existesca una teoria alternativa que substituesca amb avantatge l'anterior.

Evidentment la part més important de l'experimentació és l'anàlisi dels resultats obtinguts: l'estudi de les dades, la comprovació de les hipòtesis, l'ajust a lleis matemàtiques, la discussió i possible explicació dels problemes trobats, l'anàlisi dels intervals de validesa i simplificacions, etc. S'ha de fer sempre una *valoració crítica* i delimitar clarament les *conclusions*.

Finalment, tractarem de deixar memòria dels resultats i les conclusions elaborant un report experimental, o una publicació científica. Aquest aspecte, molt significatiu (sobretot si volem disseminar el nostre treball), el tractarem amb detall al Cap. 7.

# Mesura i concepte d'incertesa

---

## 2.1 L'exactitud de la mesura i la idea d'error aleatori

La certificació del funcionament correcte d'un artefacte o d'una màquina qualssevol fa ús de nocions que són pròpies de la Metrologia. Un traçador (*plotter*), posem per cas, ha de situar el punter en la posició exacta de manera que dibuixi amb precisió l'esquema o el plànol amb què estem treballant. Un altre exemple de la necessitat d'exactitud el trobem en els dials analògics dels aparells de ràdio: hem de fer girar la roda fins que sintonitzem l'emissora que volem i deixar-la, precisament, en la posició adequada. En general, l'exactitud (també anomenada precisió) és un requeriment absolutament comú en tota mena d'objectes artificials. Les normes tècniques dels aparells, dels productes fabricats o els requeriments sobre control de qualitat fan referència a aquest aspecte. Penseu per exemple en la cadena de muntatge d'una fàbrica de mobles o d'una empresa de taulells ceràmics, les dimensions de les peces que ixen de la cadena confiem que es mantinguen dins d'un marge determinat prèviament perquè puguin satisfer certes condicions desitjades. Es sol anomenar *tolerància* aquest marge de confiança o marge d'error. En aquests casos, doncs, el concepte d'interval d'error està relacionat amb la distribució dels valors de la magnitud (llargària d'una peça, per exemple) quan mesurem una col·lecció d'objectes que esperem que siguin iguals. Com més menut siga l'interval d'error major considerarem l'exactitud. És evident, a la vista d'aquests comentaris, que la precisió absoluta és impossible. Aquesta idea d'error com la dispersió dels valors que assolixen variables de la mateixa espècie (per exemple la llargària d'una col·lecció de peces ceràmiques «iguals», en el sentit de construïdes de la mateixa manera) és una de les possibles maneres que entendre el concepte. Diem en aquest cas que realitzem la mateixa mesura sobre un conjunt d'objectes semblants.

Tanmateix, també és possible efectuar una sèrie de mesures idèntiques i successives (seguint el mateix procediment) amb el mateix objecte (en general direm procés): mesurar moltes vegades la llargària de la mateixa peça. La idea de distribució dels resultats tornarà a aparèixer. Els valors que resultaran dels mesuraments no han de coincidir necessàriament en tots els

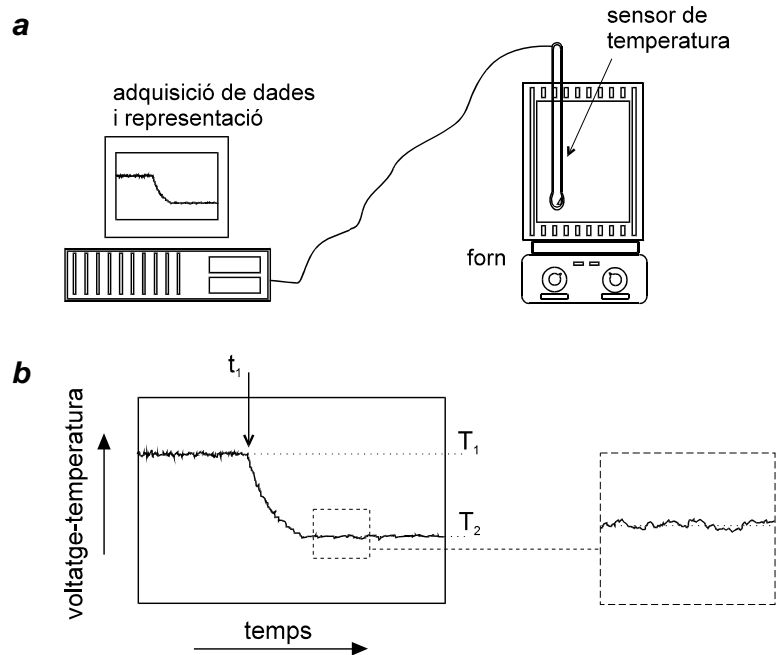


casos i, per tant, també ara podem parlar d'interval d'error perquè s'observa una dispersió en els resultats de les mesures. Doncs bé, aquesta és l'altra via que hi ha de definir el concepte d'error: diem en aquest altre cas que realitzem moltes mesures sobre un mateix objecte. Podem resumir les idees d'aquests dos paràgrafs amb els punts següents:

- *Cas a)* L'interval d'error apareix en realitzar un únic mesurament sobre cada element d'una col·lecció de processos similars;
- *Cas b)* L'interval d'error s'observarà en realitzar una sèrie de mesuraments semblants sobre el mateix procés.

Vegem ara amb una sèrie d'exemples com solen presentar-se els errors en el cas que hem anomenat *b* (però les idees tenen igualment aplicació en el cas *a*). Com veurem, podem associar una font d'error a cadascuna de les tres parts o blocs en què hem dividit la cadena de mesura (Secció 1.3). Comencem visualitzant el senyal que produeix un sensor de temperatura per mitjà d'una gràfica de la temperatura en funció del temps  $T(t)$ , Fig. 2.1.

**Fig. 2.1** Enregistrament de la temperatura d'un forn per mitjà d'un sensor de temperatura i un sistema d'adquisició de dades i representació. El sensor converteix la temperatura en un senyal de voltatge amb retard temporal negligible. El forn es troba inicialment a temperatura  $T_1$ , i en l'instant  $t_1$  s'ha abaixat a  $T_2$  per mitjà del regulador: (a) esquema del muntatge; (b) ampliacions de les dades de temperatura enregistrades, on es veu la corba després de  $t_1$  deguda al temps d'estabilització del forn.



Val a dir que aquesta mena de procediment: l'adquisició d'un senyal elèctric produït per un sensor i visualitzat en la pantalla d'un oscil·loscopi o un ordinador, és la manera habitual de realitzar mesuraments a hores d'ara.

Si l'estímul (la temperatura) no canvia hauríem d'observar una ratlla contínua que no variava. Però, en realitat, la lectura de la temperatura, per alguna causa que no cal explicitar-hi ara, efectua fluctuacions a l'atzar al voltant d'un cert valor, vegeu la zona del gràfic fins l'instant que hem anomenat  $t_1$ . Aquesta és la primera font d'error possible. Si mesurem en diferents instants del temps el valor de la temperatura s'hi obtindrà una dispersió que estarà relacionada amb l'amplitud de les fluctuacions. L'interval d'error proporciona una idea del marge de variació de la variable, que haurem d'inferir a partir d'una col·lecció de mesures. Això vol dir que la idea de mesura du implícit el concepte de fluctuació. En termes estadístics diem que el material base d'una mesura és, per naturalesa pròpia, una distribució de dades. A la vista d'aquesta gràfica es pot dir que el marge d'error és un concepte estadístic: les fluctuacions a les quals fa referència són a l'atzar. En un moment determinat  $t_1$  hi ha un canvi de temperatura al forn, a partir de  $T_1$  disminueix gradualment i s'estabilitza a  $T_2$ . Hem ampliat una porció de la gràfica per fer més evident que, això que anomenem temperatura  $T_2$ , és en realitat una qüestió més complexa: hi són presents les fluctuacions. Per tant,  $T_2$  resultarà posteriorment del càlcul de la mitjana de les dades.

Una altra font d'error apareixerà en l'actuació del bloc de processament de senyal que es situa després del sensor. Aquesta part de la cadena de mesura inclou generalment dispositius electrònics que sotmeten el senyal a una sèrie de modificacions. En fer aquestes modificacions és inevitable que es sumen components aleatoris al senyal elèctric. En general diem que s'hi introdueix un error addicional que es superposarà a la fluctuació de la variable. D'entrada, l'error que s'atribueix al bloc de processament i el que prové de l'estímul exterior són de la mateixa naturalesa, és a dir, l'un i l'altre són considerats aleatoris (expressats estadísticament pel seu valor quadràtic mitjà, com veurem en la secció següent).

Com hem indicat anteriorment, els senyals elèctrics solen traduir-se en una longitud que poden observar visualment amb el bloc final de la cadena de mesura (la presentació de dades). El cas més senzill és aquell en què llegim un punter que es posiciona en una escala graduada. La divisió mínima de l'escala també es considera una font d'error. Si el regle que fem servir està dividit en intervals d'1 mm, per exemple, aquesta imprecisió també caldrà tenir-la en compte. Considerarem que aquest últim tipus d'error també és de naturalesa estadística (aleatori).

Fem un resum de les característiques essencials dels errors aleatoris:

- Els errors aleatoris són de naturalesa estadística.
- Els errors aleatoris estan relacionats amb la fluctuació de la variable

estudiada, les variacions introduïdes en la cadena de mesura o a la precisió del sistema de presentació de les dades o lectures.

- L'error introduït per cada font d'error pot contribuir de manera diferent segons l'instrument o el mètode de mesura que utilitzem.

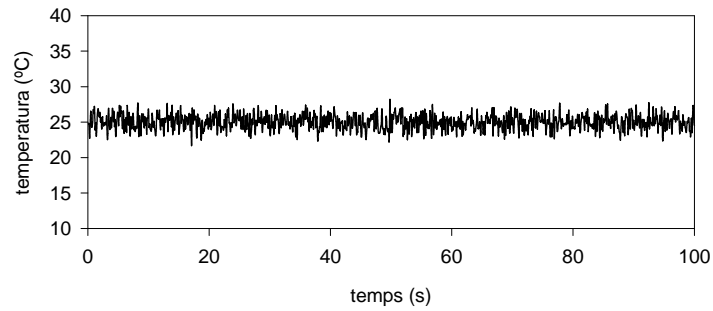
Per a reduir els errors aleatoris podem, segons els casos:

- Millorar el mètode experimental, i refinar les tècniques.
- Repetir l'experiment moltes voltes.
- Si els errors aleatoris resultaven d'incerteses instrumentals, haurem de fer ús d'instrumentació més fiable i precisa.

## 2.2 Representació estadística de les mesures

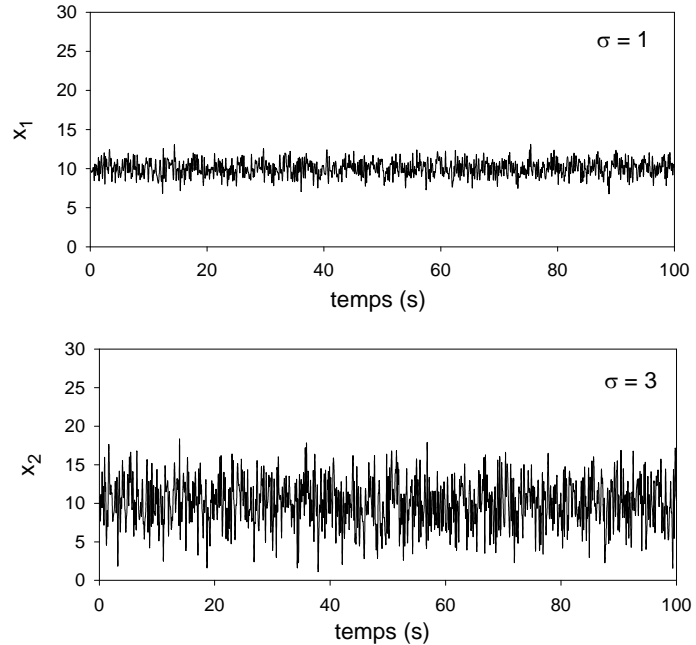
Segons hem vist, sempre que realitzem una mesura experimental el valor de la variable mesurada està sotmès a *fluctuacions*. Quan fem ús d'un sensor de temperatura, com en la Fig. 2.1, la lectura —en aquest cas un voltatge que varia amb el temps— fluctua al voltant d'un cert valor  $T_2$ . Vegeu, ara, les fluctuacions de temperatura en la Fig. 2.2: això és el que observem en efectuar tot un procés de mesura. La descripció matemàtica d'aquesta funció no és simple, ja que les fluctuacions de la temperatura segueixen un patró no determinat. Tingueu en compte que si haguérem triat un altre instant del temps per a començar a llegir la temperatura, la forma de la representació hauria estat tota una altra. Això vol dir que, en realitat, no coneixem completament com és la funció. Aquest problema s'evita, en part, representant aquesta d'evolució temporal fent servir una *variable aleatòria*: és a dir, una funció de la qual només coneixem el seu comportament estadístic. En el cas que tractem, la representem per  $T(t)$ , una variació temporal de la mesura de temperatura. En general escriurem variables aleatòries com  $x(t)$ . Doncs bé, a partir d'aquesta funció mesurada hem de determinar l'error que hi cometem. És a dir, la idea d'error està connectada amb la descripció d'una variable aleatòria.

Fig. 2.2 Lectura que proporciona un sensor de temperatura.



¿Com relacionem l'error amb les fluctuacions que efectua la variable aleatòria? I també, ¿com calculem el valor al voltant del qual fluctua la lectura? El procediment habitual consisteix a assignar, al valor de la mesura, la mitjana de la lectura (en el cas de la Fig. 2.2 correspon a 25° C), és a dir, calculem senzillament un valor mitjà. L'error, en canvi, s'estima a partir del valor quadràtic mitjà (desviació estàndard) de la lectura,  $\sigma_x$  (aquest paràmetre indica, en valor mitjà i al quadrat, l'amplitud de les desviacions respecte de la mitjana). La idea que busquem amb això és conèixer la repercussió de les fluctuacions (vegeu la Fig. 2.3, en què representem l'evolució de dues mesures amb el mateix valor mitjà, però  $\sigma_x$  diferent).

Fig. 2.3 Dos exemples de variables aleatòries amb valor quadràtic mitjà diferent.



Les expressions que serveixen per a calcular el valor mitjà i el valor quadràtic mitjà són

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (2.1)$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x})^2 dt. \quad (2.2)$$

En les expressions anteriors, els límits d'integració es fan tendir a infinit. Evidentment, en termes pràctics això no és realitzable i les mitjanes temporals es calculen en un interval de temps determinat. Per tant, és possible que, per exemple en calcular la mitjana d'una variable aleatòria en dos intervals del temps diferents, els valors de  $\bar{x}$  no coincidisquen (vegeu la Secció 3.2 sobre aquest punt).

Les expressions anteriors tenen una cosa en comú: l'una i l'altra són mitjanes temporals d'una certa funció. Es calculen fent una integral del temps i després dividint el resultat per l'interval de temps que s'ha emprat en la integral. Si recordem, ara, la secció anterior, en què es descrivia les maneres possibles de trobar fluctuacions en un procés de mesura, veiem que

aquestes mitjanes temporals corresponen al *cas b*), quan realitzàvem una sèrie de mesures semblants sobre el *mateix procés*. És clar que aquestes mesures semblants s'hauran d'efectuar en diferents instants del temps i, per tant, obtindrem una funció  $x(t)$ . L'altra possibilitat, que havíem anomenat *cas a*), és el cas de realitzar una única mesura sobre cada element d'una col·lecció de processos similars en el *mateix instant*. També ara es pot calcular el valor mitjà i el valor quadràtic mitjà, no amb mitjanes temporals sinó utilitzant valors mitjans sobre la col·lecció de processos

$$\bar{x} = \langle x_k \rangle, \quad (2.3)$$

$$\sigma_x^2 = \langle (\bar{x} - x_k)^2 \rangle, \quad (2.4)$$

on l'índex  $k$  representa cada procés de la col·lecció i el símbol  $\langle \rangle$  indica el càlcul de valors mitjans sobre la col·lecció. Vegeu la Secció 4.3, en què es donen detalladament aquestes expressions.

Quan un tipus de mitjanes i l'altre (temporals sobre un procés i en un instant sobre la col·lecció de processos) proporcionen el mateix valor, direm que els processos descrits per la variable aleatòria  $x(t)$  són un sistema *ergòdic*. És a dir, és el mateix considerar molts processos en un instant que un únic procés al llarg del temps. L'expressió (2.1) és igual a (2.3) i també (2.2) a (2.4).

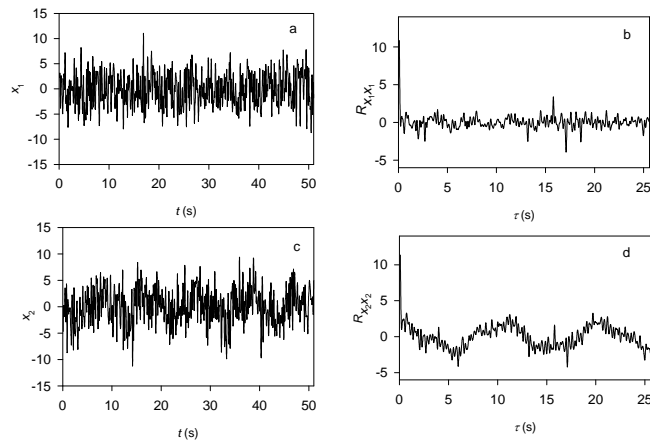
Acabem aquest punt d'introducció amb el concepte de *correlació* entre variables aleatòries. Suposeu que mesurem dues variables aleatòries  $x$  i  $y$  —recordeu que hi trobarem les fluctuacions de què hem parlat— es diu que no hi ha correlació entre elles (que no estan correlacionades) si les variacions d'una no afecten les variacions de l'altra. Per exemple, imagineu que mesurem la temperatura en dos llocs allunyats l'un de l'altre, les fluctuacions que hi observarem no tindran res a veure, no hi haurà cap relació. Però aquesta situació no sempre és el cas. És molt possible que les variables aleatòries depenguen l'una de l'altra.

La forma matemàtica d'expressar la idea de correlació entre variables es basa també en una mitjana temporal, com hem vist en (2.1) i en (2.2),

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (2.5)$$

on  $R_{xy}(\tau)$  representa la funció de correlació entre  $x$  i  $y$ . El paràmetre  $\tau$  indica el temps de la correlació. Quan la funció de correlació es calcula per a la mateixa variable  $x(t)$  rep el nom especial de funció d'autocorrelació,  $R_{xx}(\tau)$ . El mateix s'obindrà sobre una col·lecció de processos si se satisfà la hipòtesi d'ergodicitat.

**Fig. 2.4** Exemples d'ús de la funció d'autocorrelació amb dues variables aleatòries:  $x_1$  és un soroll amb valor mitjà igual a zero i  $\sigma_{x_1} = 3$  (a, b); en canvi  $x_2$ , a més del soroll, conté una interferència sinusoidal amb amplitud igual a 2 i període 10 s (c, d).



Vegem l'ús d'aquestes funcions amb un exemple: suposeu que la lectura que obtenim en realitzar una mesura és com la representada en la Fig. 2.4.a. Diem en aquest cas que la mesura conté una fluctuació que anomenarem *soroll*. La forma de la funció d'autocorrelació (Fig. 2.4.b) està picada al voltant de  $\tau = 0$ , perquè després d'un interval de temps molt curt la variable no «se'n recorda» de l'estat de la funció. En general es diu que no hi ha memòria en les dades. Compareu aquesta situació amb el cas que presentem en la Fig. 2.4.c. Encara que a simple vista està amagada, a més del soroll hi ha una ona sinusoidal amb una amplitud menor que la desviació del soroll. És una situació ben habitual quan realitzem mesures amb aparells electrònics: l'ona sinusoidal sol tenir un origen exterior al sistema de mesura, per exemple una emissió de ràdio, i es coneix amb el nom d'*interferència*. Comproveu que la funció d'autocorrelació (Fig. 2.4.d) no és ara tan simple, hi apareixen pics cada cert temps, que correspon, evidentment, amb el període de la sinusoide.

### 2.3 Error sistemàtic

Mentre que hem insistit en la naturalesa aleatòria i impredecible de les fonts d'error, en l'exemple que acabem de veure la interferència exerceix una influència regular sobre les mesures. En general, hi ha un tipus d'errors en les mesures que no és de naturalesa estadística. Aquest error origina un biaix (en anglès *bias*) en les mesures i es manifesta amb un desplaçament del valor que, efectivament, havia d'assolir la mesura. Però en canvi, el desplaçament no fluctua (com en els errors aleatoris) sinó que pren un valor més o menys constant amb el temps o canvia de manera regular, en mesures repetides

d'una magnitud. S'anomenen en general errors *sistemàtics*. Aquest tipus d'error apareix típicament en descalibrar-se l'instrument de mesura que fem servir: el comptakilòmetres del nostre cotxe mesura la velocitat  $5 \text{ km h}^{-1}$  per davall del que seria correcte, posem per cas. Sol corregir-se aquesta anomalia amb un *ajust del zero* de l'aparell de mesura. A més d'això, unes altres causes d'introducció d'errors sistemàtics són d'origen ambiental: canvis de la temperatura, la humitat, els corrents d'aire o els camps electromagnètics, afecten habitualment la mesura desplaçant més o menys el resultat, és el que sol anomenar-se *derives* o *interferències*, com hem vist amb l'exemple de la Fig. 2.4.

Apareixen errors sistemàtics en la lectura de molts instruments per causa de factors inherents a la manufactura dels instruments, segons els factors de tolerància dels seus components. Aquests errors venen normalment catalogats en les especificacions tècniques dels instruments, com veurem amb més detall en la Secció 4.2.

La presència d'errors sistemàtics sol ser detectable usant dos aparells diferents per a mesurar la mateixa magnitud, en casos de falta de calibratge, o també modificant les condicions ambientals i observant quin n'és l'efecte. Quan identifiquem un defecte de metodologia que introdueix un error sistemàtic en les mesures efectuades, procedirem a corregir el resultat.

---

### Exemple 2.1

Mesurem la llargària d'una taula amb un regle. El resultat (mitjana de les dades) és: 1,423 m.

Però la mesura es va fer a  $30^\circ \text{ C}$ , mentre que el regle estava calibrat a  $25^\circ \text{ C}$ , i té un coeficient d'expansió tèrmica de  $0,0006 \text{ K}^{-1}$ ; el regle s'havia allargat, i com a conseqüència la mida real de la taula és major del que ens havia donat el mesurament. Per a corregir la llargària del regle farem ús de l'expressió que descriu l'expansió tèrmica

$$L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$$

i el nou resultat és

$$(1,423 \text{ m}) \times (1 + 0,0006 \times (30 - 25)) = 1,427 \text{ m.}$$

Ara ens adonem també que durant la mesura vam llegir les divisions mirant obliquament. Per mitjà d'algunes proves trobem que així es comet un error de 2 mm per excés. Corregim novament i el resultat és

$$1,425 \text{ m.}$$

S'ha d'observar que en aquesta determinació no estem considerant l'error d'origen estadístic.

---

### Exemple 2.2

Suposem que després de mesurar el període d'un pèndol matemàtic, dues persones



obtenen els valors següents per a l'acceleració de la gravetat:

$$g_1 = 10,1 \pm 0,5 \text{ m/s}^2,$$

$$g_2 = 30,25 \pm 0,02 \text{ m/s}^2.$$

És evident que el segon resultat és més precís, perquè té assignat un error menor. Ara bé, si ens adonem que la diferència entre els valors és aproximadament igual a 20 unitats, haurem de concloure que bé una mesura, bé l'altra o bé les dues estan afectades per un error sistemàtic. Si no posseïm informacions addicionals no tindrem més remei que acudir a una altra mesura alternativa. (Convé recordar ací que, en construir-se els primers rellotges mecànics, els vaixells que feien viatges llargs n'havien de dur tres diferents a bord per tal d'orientar-s'hi. Amb dos només, no hi ha manera de saber l'hora si un es retarda.)

---

Encara que és possible que en el disseny de l'experiment (elecció del mètode de mesura i de la instrumentació) passen desapercibuts errors sistemàtics que no hàgem descobert, normalment els errors sistemàtics poden ser controlats i reduïts de manera que siguin irrelevantes. Això fa que els únics errors importants amb què haurem de treballar siguin els errors aleatoris.

En general es diu que el resultat d'una mesura és *acurat* si té poc error sistemàtic, i diem que és *precís* si l'error aleatori és petit. Cal adonar-se que mesures molt precises ens poden portar a resultats poc fiables si hi ha un error sistemàtic, seria el cas, per exemple, d'un rellotge molt bo (d'alta precisió) que està endarrerit un quart d'hora.

## 2.4 Concepte d'incertesa

Concretem les consideracions de les seccions precedents per a introduir la noció tècnica d'incertesa.

Quan mesurem una magnitud volem donar acuradament i precisament el valor de la quantitat mesurada que es correspon amb la propietat física de l'objecte. L'ideal seria afinar tant les condicions experimentals, els instruments i la metodologia que determinàvem un valor exacte. Però la realitat no permet això. En termes conceptuals la quantitat mesurable forma part d'una metodologia o model del sistema, i existeixen discrepàncies inevitables entre el model adoptat i l'objecte real o conjunt d'objectes que mesurem. Les condicions que controlen l'estat del sistema només són conegudes fins un cert punt; i les diferents parts de la cadena de mesura introdueixen fluctuacions aleatòries que poden ser reduïdes però no eliminades. A més, les variables físiques macroscòpiques (temperatura, pressió, etc.) tenen un component fluctuant, ja que estan definides com a valor mitjà sobre un gran nombre de constituents. En definitiva, el valor

resultant de la mesura no és ni pot ser exacte en el sentit indicat més amunt, ja que faria falta un punt de vista quasi-diví per a establir el valor exacte; per això tota mesura ve afectada per un *error*. A voltes l'error consisteix literalment en una equivocació; com ara si es tracta d'alguns tipus d'error sistemàtic o un defecte del mètode de mesura. Però les altres limitacions que acabem d'esmentar, són de principi i estan lligades al que és possible fer experimentalment. En aquest respecte, a l'hora de donar el resultat d'una mesura és de la màxima importància quantificar el màxim error del valor acceptat, proporcionant un interval de delimitació del resultat, que podem anomenar *incertesa*, i que també rep el nom d'*interval d'error*.

Com el «valor exacte» és desconegut, no existeix una manera unívoca, algorítmica de determinar la incertesa d'una mesura. En cada cas s'han de fer càlculs basats en les *estimacions* de tots els components de la incertesa del mesuratge. En els capítols següents veurem les maneres més bàsiques i comunes d'atribuir la incertesa a partir dels dos factors fonamentals: la precisió i acuratge dels instruments, i la dispersió de les mesures. A continuació indicarem els convenis d'*expressió* del resultat i la seua incertesa.

#### A *Error absolut*

Sovint, en compte de donar els límits de l'interval de delimitació, el resultat s'expressa per mitjà del valor central de l'interval i la meitat de la seua amplària (*error absolut*). Aquesta és la manera més corrent d'escriure una quantitat experimental: indicant el valor acceptat i l'error absolut,

$$x_m \pm \varepsilon(x). \quad (2.6)$$

Així, el resultat de la mesura correspondrà a l'interval expressat en termes de  $x_m$  i  $\varepsilon(x)$ :

$$(x_m - \varepsilon(x), x_m + \varepsilon(x)). \quad (2.7)$$

L'error absolut sempre es dona en *valor absolut*, és a dir, positiu.

#### B *Error relatiu*

L'*error relatiu* és un índex d'error molt útil, perquè expressa directament la *qualitat* de la mesura, pel que fa a la seua precisió. Es defineix l'error relatiu a partir de l'error absolut i el valor acceptat segons:

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x_m}. \quad (2.8)$$

Una manera corrent d'expressar l'error d'una mesura és donar l'error relatiu en tant per cent, %, i també en parts per cent (o mil, o deu mil, etc.)

**Exemple 2.3**

Si  $\varepsilon_r(x) = 0,004$ , l'error de  $x$  és de 4 parts per mil (4 ppm).

**Exemple 2.4**

Suposem que mesurem amb un regle que aprecia mil·límetres, dues longituds, i obtenim

$$x = 1000,0 \pm 0,1 \text{ cm}$$

$$y = 10,0 \pm 0,1 \text{ cm}$$

Ambdues tenen el mateix error absolut, tanmateix, la primera és més precisa que la segona, ja que

$$\varepsilon_r(x) = 0,01 \%$$

$$\varepsilon_r(y) = 1 \%$$

Direm que la primera mesura té més *resolució* que la segona.

**2.5 Escripura de resultats de mesures amb la seua incertesa**

En realitzar una mesura obtindrem un parell de nombres ( $X$ ,  $E$ ) que correspondran al resultat i a la incertesa que hi atribuïm. El nombre de xifres amb el qual s'expressa un resultat experimental no pot ser arbitràriament gran; no totes les xifres seran representatives (*significatives*). Hi ha un nombre de xifres útils que aporten informació quantitativa de la mesura: s'anomenen xifres significatives. Són aquelles xifres de les quals sabem amb certesa raonable que són exactes.

Hem de truncar i arrodonir *tota* quantitat experimental per a deixar-hi només les xifres que són significatives. En general la part truncada en arrodonir una quantitat, la tractem com una fracció. Si la fracció és major o igual que  $1/2$ , incrementem la darrera xifra significativa de la quantitat a arrodonir. Si la fracció és menor que  $1/2$ , no incrementem. Per exemple, per a arrodonir 5,48623 deixant-hi 3 xifres significatives, observem que la fracció 0,623 és major que  $1/2$ , i doncs incrementem el 8 i queda 5,49.

El nombre de xifres significatives d'un resultat estarà determinat per l'incertesa que l'afecta. Segons això, el valor acceptat  $x_m$  ha de *concordar* amb l'error absolut  $\varepsilon_x$ ; l'última xifra significativa del valor acceptat i l'última xifra de l'error absolut ha d'ocupar la mateixa posició. Per tant arrodonim *primerament*  $E$ , per a determinar l'error absolut.

Sempre s'ha d'expressar l'error amb una, o com a molt dues xifres significatives. Aquest criteri està basat en el fet que els errors indiquen fluctuacions, per tant, no té massa sentit representar l'efecte d'una fluctuació amb moltes xifres. Seguirem el procediment següent per a arrodonir l'error.

L'escriurem

- amb 2 xifres significatives si la primera és menuda (menor que 3), i
- amb 1 xifra significativa si la primera és gran (mantenim 0,29 però arrodonim 0,31  $\rightarrow$  0,3).

Una vegada hàgem arrodonit l'error passarem a arrodonir el resultat  $X$ , i així la incertesa determina la precisió amb què donem el valor acceptat. El procediment s'il·lustra amb l'exemple següent, i es resumeix en l'Apèndix 2.

---

### Exemple 2.5

(a) Considerem la longitud  $L = 2,429$  m.

Si  $\alpha(L) = 0,025$  m, aleshores s'escriurà

$$L = (2,429 \pm 0,025) \text{ m.}$$

Però en canvi, si  $\alpha(L) = 0,075$  m, s'expressarà el resultat com

$$L = (2,43 \pm 0,08) \text{ m.}$$

(b) Suposem que hem determinat el volum  $V = 80423,67 \text{ m}^3$ , amb un error  $E(V) = 37,26 \text{ m}^3$ . Primerament arrodonim l'error per a deixar-lo amb una sola xifra significativa:  $\alpha(V) = 40 \text{ m}^3$ . En acabant arrodonim el resultat fins les desenes, i així trobem  $V = 80420 \text{ m}^3$ . Finalment donem la quantitat com

$$V = (80420 \pm 40) \text{ m}^3.$$


---

Val a dir que si no es dona explícitament l'error absolut o relatiu d'una quantitat física, es sobreentendrà que la precisió correspon a l'última xifra significativa de la quantitat. És a dir, si ens comuniquen com a resultat d'una mesura el valor 23,34 estarem donant per suposat que en realitat el resultat és  $(23,34 \pm 0,01)$ . Observem en aquest respecte que si un nombre no porta coma decimal, és dubtós si els zeros a la dreta hi són significatius o no, com ara 2030 podria tenir tres xifres significatives però també pot tenir-ne quatre, segons que el segon 0 siga o no significatiu. L'escriptura de nombres en *notació científica* evita aquest inconvenient i aporta d'altres avantatges, com es mostra a l'Exemple 2.6.

---

### Exemple 2.6

Vegem l'escriptura en notació científica, i els avantatges que reporta aquesta notació:

(a)  $2030 \rightarrow 2,030 \times 10^3$

Evitem l'ambigüitat del segon 0: en notació científica, no hi ha dubte que el segon 0 és xifra significativa d'aquesta quantitat. Entenem, doncs, que en els nombres escrits en notació científica totes les xifres que hi apareixen són significatives.

(b)  $0,0002030 \rightarrow 2,030 \times 10^{-4}$

L'escriptura en notació científica és més còmoda i convenient.

---

## Problemes

- 2.1 Expresseu correctament, i amb totes les xifres significatives, les quantitats següents:
- a)  $17,923 \pm 1,691$ ;
  - b)  $0,00005432 \pm 3,68 \times 10^{-6}$ ;
  - c)  $9789,8 \pm 10,3$ ;
  - d)  $3,3923 \pm 0,1240$ ;
  - e)  $(22,34 \times 10^{-6}) \pm (5,12 \times 10^{-7})$ ;
  - f)  $99,9 \pm 1,02$ ;
  - g)  $5398342,32 \pm 824,54$ .
- 2.2 ¿Quin error absolut i quin error relatiu es comet en fer les aproximacions
- a)  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ,
  - b)  $e^x \approx 1+x$ ,
- per a  $x = 0,20$ ?
- 2.3 De les dues mesures següents, quina té més precisió?
- $L = 1023,2 \pm 0,2$  cm;
  - $T = 0,062 \pm 0,001$  s.

# Propagació d'errors

Moltes voltes s'ha de determinar el valor d'una magnitud a partir de la mesura d'altres magnituds. Per exemple, normalment traem l'àrea d'un paral·lelogram a partir de les dimensions dels costats ( $A = l_1 l_2$ ), i també és freqüent efectuar mesures de voltatge  $V$  i corrent elèctric  $I$  per a determinar el valor d'una resistència ( $R = V / I$ ). Diem, en aquests casos, que la mesura és indirecta perquè el càlcul es fa per mitjà d'una relació coneguda entre les variables. En general, tenim una magnitud  $z$  que depèn d'altres  $x, y, \dots$ ,

$$z = f(x, y, \dots), \quad (3.1)$$

i la qüestió important és la determinació de l'error  $\varepsilon_z$  associat a la mesura indirecta, tot considerant els errors de les magnituds mesurades  $\varepsilon_x, \varepsilon_y \dots$ . Hi ha mètodes diversos per a calcular l'error de la mesura indirecta, ací en proposarem uns quants.

## 3.1 Errors de propagació lineal

### A Mètode de les derivades parcials

Com la mesura ha donat resultats  $(x_m \pm \varepsilon_x), (y_m \pm \varepsilon_y) \dots$ , el valor estimat de  $z$  serà

$$z_m = f(x_m, y_m, \dots), \quad (3.2)$$

i el problema és determinar la incertesa que afecta  $z_m$ . Observem que segons la relació funcional (3.1) entre  $z$  i  $x$ , si la variable  $x$  es troba compresa en l'interval entre  $x_m$  i  $x_m + \Delta x$ , llavors correspon a la variable  $z$  un interval

$$\Delta z = f(x_m + \Delta x, y_m, \dots) - z_m. \quad (3.3)$$

Segons el desenvolupament de Taylor trobem

$$f(x_m + \Delta x, y_m, \dots) = f(x_m, y_m, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \quad (3.4)$$

Si  $\Delta x$  és petit podem negligir els termes quadràtics i superiors i així veiem de (3.3) i (3.4) que

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \quad (3.5)$$

Segons (3.5) la *propagació d'error* de la magnitud  $x$  a la magnitud  $z$  vindrà donada per l'expressió

$$(\varepsilon_z)_x = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \varepsilon_x \quad (3.6)$$

i considerant les diverses magnituds  $x, y, \dots$  que aporten incertesa a la magnitud  $z$  obtenim

$$\varepsilon_z = (\varepsilon_z)_x + (\varepsilon_z)_y + \dots \quad (3.7)$$

Així arribem a l'expressió completa de propagació d'errors

$$\varepsilon_z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \varepsilon_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \varepsilon_y + \dots \quad (3.8)$$

Aquest procediment de càlcul de l'error porta implícita la hipòtesi que els errors de les magnituds són prou petits, respecte dels valors de les variables; és a dir que  $\varepsilon_x \ll |x_m|$  i que  $\varepsilon_y \ll |y_m|$ . També, que les variables  $x$  i  $y$  no tenen correlació. En general, l'únic que es pot afirmar en general és que  $\varepsilon_z$  serà menor que l'expressió (3.8), i només si no són correlacionades es mantindrà la igualtat. En la Taula 3.1 s'aplica l'expressió (3.8) a algunes relacions bàsiques i freqüents.

**Taula 3.1** Fórmules de propagació lineal d'errors.

relació	fórmula
$z = x + y$	$\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
$z = xy$	$\varepsilon_z = y\varepsilon_x + x\varepsilon_y$
$z = ay$	$\varepsilon_z = a\varepsilon_x$
$z = \frac{1}{x}$	$\varepsilon_z = \frac{1}{x^2} \varepsilon_x$
$z = x^a y^b \dots$	$\frac{\varepsilon_z}{ z } =  a  \frac{\varepsilon_x}{ x } +  b  \frac{\varepsilon_y}{ y } + \dots$

$a, b$  són constants conegudes amb precisió arbitrària.

### Exemple 3.1

Si hem determinat les següents dimensions d'un rectangle

$$l_1 = (1,232 \pm 0,005) \text{ m,}$$

$$l_2 = (1,514 \pm 0,003) \text{ m,}$$

aleshores el valor estimat de l'àrea és

$$A = l_1 l_2 = (1,232 \text{ m}) \times (1,514 \text{ m}) = 1,8655 \text{ m}^2.$$

Obtenim l'expressió de propagació d'errors i calculem l'error indirecte que afecta l'àrea:

$$\frac{\partial A}{\partial l_1} = l_2; \quad \frac{\partial A}{\partial l_2} = l_1,$$

$$\varepsilon_A = l_2 \varepsilon_{l_1} + l_1 \varepsilon_{l_2}$$

$$= (1,232 \text{ m}) \times (0,005 \text{ m}) + (1,514 \text{ m}) \times (0,003 \text{ m}) = 0,011 \text{ m}^2.$$

I així l'expressió final de l'àrea és  $A = (1,866 \pm 0,011) \text{ m}^2$ .

---

### B Mètode dels logaritmes

Quan la fórmula té la forma particular d'un monomi,

$$z = x^a y^b \dots \quad (3.9)$$

(on  $a$  i  $b$  són constants), s'obté una avaluació ràpida de l'error indirecte prenent logaritmes en (3.9) i diferenciant a continuació; el resultat que s'obté es dona en la Taula 3.1. Veurem l'aplicació del mètode amb dos exemples més avall.

Aquest mètode no és essencialment diferent del mètode de les derivades parcials però es de càlcul molt simple, i a més obtenim una expressió en termes d'errors relatius, la qual permet avaluar ràpidament la influència de cadascuna de les magnituds mesurades en l'error final, com s'il·lustra a l'Exemple 3.2.

---

#### Exemple 3.1 (Continuació.)

Tornem a considerar la fórmula de l'àrea

$$A = l_1 l_2.$$

Per a estimar l'error indirecte, prenem logaritmes als dos costats de la igualtat

$$\ln A = \ln l_1 + \ln l_2,$$

i a continuació diferenciem

$$\frac{dA}{A} = \frac{dl_1}{l_1} + \frac{dl_2}{l_2}.$$

Ara es considera el diferencial com a interval d'error (si hi ha termes negatius es prenen mòduls, ja que els errors són sempre additius),

$$\frac{\varepsilon_A}{A} = \frac{\varepsilon_{l_1}}{l_1} + \frac{\varepsilon_{l_2}}{l_2}.$$

Així obtenim una expressió en termes d'errors relatius, com ja havíem comentat.

---



---

#### Exemple 3.2

El període de les oscil·lacions menudes d'un pèndol simple de longitud  $L = (22,1 \pm 0,1) \text{ cm}$  és  $T = (0,943 \pm 0,006) \text{ s}$ . ¿Quin valor de l'acceleració de la gravetat  $g$  podem acceptar a partir d'aquestes dades?



Per a calcular  $g$  gastarem la relació ben coneguda

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

d'on resulta

$$g = 4\pi^2 \frac{0,221 \text{ m}}{(0,943 \text{ s})^2} = 9,811 \text{ ms}^{-2}.$$

Ara hem de donar l'error que afecta aquest valor numèric de  $g$ . Farem ús, primerament, del mètode dels logaritmes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(g) &= \frac{\varepsilon_g}{g} = \frac{\varepsilon_L}{L} + 2 \frac{\varepsilon_T}{T} \\ &= \frac{0,1}{22,1} + 2 \frac{0,006}{0,943} = 4,5 \times 10^{-3} + 1,27 \times 10^{-2} = 0,017. \end{aligned}$$

Així doncs, l'error relatiu de la nostra determinació de  $g$  és de l'1,7%. Convé fer notar que les dues magnituds, longitud i període, que intervenen en la determinació de  $g$ , aporten un pes diferent a l'error de la magnitud derivada. L'error del període el que contribueix en un major grau a l'error relatiu de  $g$ . Efectivament, veiem que  $\varepsilon_r(T) = 1,3\%$ , mentre que, per una altra banda,  $\varepsilon_r(L) = 0,4\%$ . Traiem la conclusió que si volguérem millorar la precisió del resultat final, hauríem de tractar de reduir l'error relatiu del període, ja que una reducció percentual de l'error de la longitud serà molt menys apreciable en el resultat final.

Val a dir també que el valor de les constants que siguen nombres irracionals, en aquest cas  $\pi$ , no pot ser triat de qualsevol manera. Si  $\varepsilon_r(L) = 0,4\%$ , haurem de prendre un nombre de xifres de  $\pi$  que impliquen un error menor que un 0,04% (10% per davall del mínim error relatiu), per tant 3,1416 o encara més precís.

Continuem amb el càlcul de  $g$  amb el seu error. Trobarem l'error absolut de  $g$ :

$$\varepsilon_g = \varepsilon_r(g) \times g = 0,017 \times (9,81 \text{ ms}^{-2}) = 0,17 \text{ ms}^{-2}.$$

Finalment, el valor acceptat de  $g$  serà

$$g = (9,81 \pm 0,17) \text{ ms}^{-2}.$$

Observem que el càlcul de l'error absolut per mitjà del mètode de les derivades parcials, eq. (3.7), dóna com a resultat

$$\varepsilon_g = \left| \frac{\partial g}{\partial L} \varepsilon_L \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \varepsilon_T \right| = \frac{4\pi^2}{T^2} \varepsilon_L + \frac{8\pi^2 L}{T^3} \varepsilon_T$$

i dividint per  $g$  s'obté la mateixa fórmula que hem vist més amunt.

### C Mètode d'estimació numèrica

Sovint es dóna el cas que el càlcul de les derivades parcials de  $f$  resulta llarg i complicat. Aleshores enlloc de calcular una fórmula analítica general per a  $\varepsilon_z$ , convé més estimar les diferents contribucions  $(\varepsilon_z)_x$ ,  $(\varepsilon_z)_y$ , ..., per càlcul numèric directe amb la relació (3.3). L'error atribuït a la magnitud  $z$  vindrà donat per la suma (3.7).

**Exemple 3.3**

Un temps característic de transició d'un electró entre dos estats està descrit per la relació

$$\tau = \tau_0 \left[ \operatorname{sech} \left( \frac{E}{2kT} \right) \exp \left( \frac{V}{kT} \right) \right]^n,$$

on  $\tau_0 = 1,500$  ms ;  $n = 4/5$ ;  $k$  és la constant de Boltzmann, i la mesura s'efectua a temperatura  $T = 300,00$  K. Si els paràmetres d'energia tenen valors

$$E = (0,370 \pm 0,015) \text{ eV}$$

$$V = (0,320 \pm 0,008) \text{ eV},$$

¿quin és valor de  $\tau$  i la seua incertesa?

Per a calcular el valor de  $\tau$ , avaluem el producte  $kT$ . Segons l'Apèndix 1, a 300 K tenim

$$kT = (38,681)^{-1} \text{ eV} = 0,025852 \text{ eV}.$$

i substituint valors en l'expressió de dalt obtenim

$$\tau = 170,3 \text{ ms}.$$

En estimar la incertesa de  $\tau$  negligim l'error aportat per  $\tau_0$  i per  $kT$ . Trobarem l'error introduït per  $E$  per estimació numèrica:

$$(\varepsilon_\tau)_E \approx |\tau(E + \varepsilon_E, V) - \tau(E, V)| = 35 \text{ ms},$$

i semblantment per a  $V$ ,

$$(\varepsilon_\tau)_V \approx |\tau(E, V + \varepsilon_V) - \tau(E, V)| = 48 \text{ ms}.$$

Aplicant la relació (3.7) s'arriba a  $\varepsilon_\tau \approx 83,1$  ms amb la qual cosa el resultat és

$$\tau = (170 \pm 80) \text{ ms}.$$

Altrament, si apliquem el mètode de les derivades parcials, s'han d'efectuar els següents càlculs:

$$\frac{\partial \tau}{\partial E} = -\frac{n \tau_0}{2kT} \tanh(E/2kT) [\exp(V/kT) \operatorname{sech}(E/2kT)]^n,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial V} = \frac{n \tau_0}{kT} [\exp(V/kT) \operatorname{sech}(E/2kT)]^n,$$

i per aplicació de (3.8) s'obté el valor  $\varepsilon_\tau \approx 81,7$  ms, semblant a l'anterior.

**3.2 Errors de propagació quadràtica**

Els mètodes vists en la secció anterior donen una estimació simple i ràpida de l'error indirecte, i a més són apropiats quan es combinen diversos errors sistemàtics. Tanmateix, també és cert que donen lloc a una sobreestimació de la propagació de l'error, ja que suposen implícitament que cada magnitud mesurada té el màxim error i que no hi ha cap mena de compensació

d'errors.

En aplicacions més refinades, i en cas en cas que els errors en les diferents magnituds siguin aleatoris, una forma més correcta d'avaluar l'error d'una mesura indirecta pot ser la següent:

$$\varepsilon_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2. \quad (3.10)$$

Aquesta expressió prové d'elevat al quadrat l'expressió (3.8) i calcular el valor mitjà sobre el conjunt de mesures  $\{x, y, \dots\}$  (veurem una demostració completa al capítol següent). Els termes creuats no apareixen en (3.10) ja que estem suposant que les variables no estan correlacionades, tal com hem indicat en els mètodes anteriors. El mateix podem dir per als errors, hem de tenir la certesa que no estan correlacionats.

### Problemes

- 3.1 Dues magnituds físiques,  $x$  i  $y$ , es relacionen per mitjà de la fórmula

$$y = 3 \ln(1/x).$$

Si  $x$  pren el valor  $(32 \pm 2)$ , ¿quant valdrà  $y$  amb el seu error?

- 3.2 Volem conèixer la caiguda de tensió en una resistència de valor  $R = (7,623 \pm 0,012) \Omega$ . La intensitat és  $I = (2,06 \pm 0,03) A$ . Trobeu  $V$  amb el seu error per mitjà de la llei d'Ohm,  $V = RI$ ,

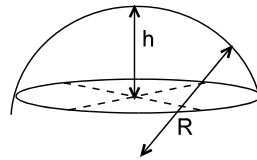
- pel mètode dels logaritmes, i
- pel mètode de les derivades parcials.

$$\text{Sol.: } V = 15,7 \pm 0,3 \text{ V}$$

- 3.3 A l'hora de mesurar la potència que una font de tensió contínua (una pila o una bateria, per exemple) subministra a una càrrega resistiva  $R$  podem utilitzar mètodes diferents, ja que la potència subministrada  $P$  es pot expressar com  $P = IV = I^2 R = V^2 / R$ , on  $V$  i  $I$  representen el voltatge aplicat i el corrent que hi circula, respectivament. Si els instruments de què disposem: voltímetre, amperímetre i ohmímetre presenten el mateix error en la mesura de cada magnitud, quin dels tres mètodes resultarà més exacte?

- 3.4 Per a calibrar un sensor de velocitat lineal (dispositiu que genera un voltatge proporcional a la velocitat que hi adquireix), el situem damunt d'un plat giratori. ¿Quina precisió assolirem en la mesura de la velocitat si podem determinar el radi de gir i la velocitat angular amb el 0,1% d'error?

- 3.5 Determineu el valor (amb el seu error) del volum de la zona esfèrica d'altura  $h = (3,22 \pm 0,05)$  cm d'una esfera de radi  $R = (8,50 \pm 0,06)$  cm.



L'expressió del volum és

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h).$$

- 3.6 Una vara de coure de longitud  $L = 1,2$  m i secció  $A = (4,8 \pm 0,1)$  cm<sup>2</sup> està aïllada per tal d'evitar pèrdues de calor a través de la seua superfície. Els extrems es mantenen a una diferència de temperatura  $\Delta T = (100,0 \pm 0,5)$  °C, ficant un extrem en una mescla de gel i aigua, i l'altre en aigua bullent i vapor.
- Heu d'establir amb quina precisió, en centímetres, cal mesurar la llargària de la vara a fi que l'error en el corrent tèrmic  $I$  siga, com a molt, del 4 %.
  - Doneu, en aquest cas, el valor del corrent tèrmic amb el seu error absolut.

La conductivitat tèrmica del coure és  $\kappa = (401 \pm 1)$  W/m·K. L'expressió del corrent tèrmic és:

$$I = \kappa A \frac{\Delta T}{L}.$$

---

# Incertesa en mesures directes

---

## 4.1. Criteris genèrics d'atribució d'incertesa

Sempre que fem un experiment hem de valorar el temps i els recursos disponibles, per un costat, i per un altre la precisió requerida per les finalitats de la investigació, fins obtenir un balanç adequat que determinarà el nivell de refinament del dispositiu experimental. Quan ja ens hem compromés amb una estratègia i la faena està feta, hem d'atribuir la incertesa que afecta el resultat obtingut.

La mesura d'una quantitat pot ser directa o indirecta, com hem vist al capítol anterior. Generalment això dependrà del fet que existeixen o no instruments desenvolupats per a mesurar la magnitud requerida. Si mesurem simultàniament diverses magnituds amb instruments acoblats al dispositiu, i en acabant calculem com a resultat una altra magnitud indirectament, l'atribució d'incertesa s'efectua amb els mètodes vists en el capítol anterior, a partir dels errors de les diferents magnituds directament mesurades.

Per tant el punt clau és l'estimació de la incertesa en una mesura directa. Hem vist al Capítol 2 que qualsevol mesura té un component aleatori. La mesura està influïda per petites variacions de les condicions ambientals (temperatura, pressió, humitat, vibracions, etc.), i per efectes deguts als instruments mateixos i en general a les diverses etapes de la cadena de mesura. El mecanisme bàsic per a reduir l'efecte de les fluctuacions aleatòries és repetir la mesura moltes voltes per a extraure el valor més probable del conjunt de dades. Tal com justificarem un poc més avall, per a un conjunt de  $n$  dades  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , el valor més probable és la *mitjana*, donada per

$$x_m = \frac{1}{n} \sum x_i . \quad (4.1)$$

Amb tot, en la *gran majoria* d'ocasions efectuem només una única mesura de la quantitat que interessa. Aleshores s'han de determinar les possibles fonts d'error i estimar la seua contribució a l'incertesa de la mesura. Com aquests error són per naturalesa extremadament diversos, no podem donar un mètode generalista per a obtenir-los. En la Secció 4.2 veurem amb detall un element principal de la incertesa en la mesura directa:

la imprecisió associada a l'escala de lectura, i les fluctuacions addicionals que introdueix l'instrument en alguna part de la cadena de mesura.

Per tant, tenim dues opcions bàsiques en efectuar una mesura directa: Realitzem una única mesura i n'estimem la incertesa; o repetim la mesura moltes voltes, prenem la mitjana i caracteritzem la dispersió de les dades.

L'estratègia concreta a seguir dependrà molt de les condicions concretes de l'experiment i de la nostra experiència prèvia amb mesures semblants. A fi de discutir un cas típic, examinem a continuació la realització de mesures elèctriques.

En la Fig. 4.2 veiem diversos multímetres de mà (a) i de taula (b) que permeten mesurar magnituds elèctriques (corrent, tensió o resistència) amb diferents precisions. Els multímetres digitals són els aparells de mesura elèctrica més comuns. Encara més si pensem que, amb la incorporació de sensors de qualsevol magnitud física, el mesurament esdevé en última instància de caràcter elèctric. Reben aquest nom perquè incorporen en un sol instrument la possibilitat d'efectuar mesuraments de les magnituds elèctriques principals: voltatge, intensitat i resistència; fins i tot hi ha models que poden mesurar capacitat i freqüència.

**Fig. 4.1** Instruments de mesura elèctrica: (a) multímetres de mà de Hewlett Packard; (b) multímetre de taula HP 3458<sup>A</sup>, amb lectura de 9 dígit.

**a**



**b**

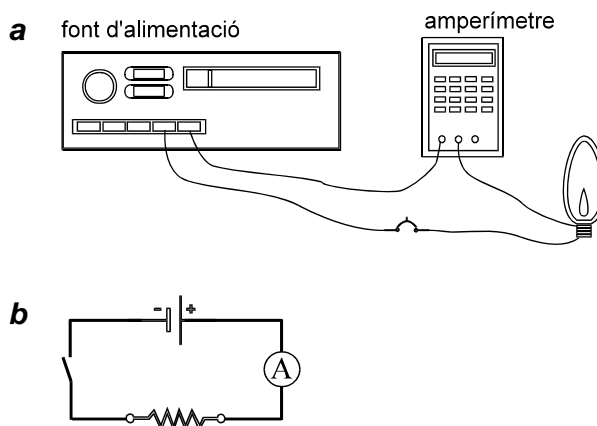


Predrem com a exemple característic de mesuratge la mesura de corrent en el muntatge de la Fig. 4.2. Hi tenim una font d'alimentació que subministra voltatge a una làmpada, i un multímetre que llig el corrent

elèctric. Després de tancar el circuit tenim la precacació d'esperar un temps perquè el sistema s'estabilitze. Òbviament, la precisió de la mesura del corrent depèn molt de la precisió del multímetre. Si gastem un multímetre de mà de 4 dígits (Fig. 4.1.a), trobarem típicament una lectura invariable.

En canvi, el multímetre més sofisticat (i molt més car, econòmicament) de la Fig. 4.2.b, dóna una determinació de 9 dígits, i veurem que els últims dígits oscil·len contínuament, sense fixar un valor únic.

**Fig. 4.2** (a) Representació d'una font de tensió que subministra corrent a una resistència; (b) esquema del circuit.



Aquesta diferència s'explica fàcilment en funció de les idees discutides en capítols anteriors. El corrent elèctric no assoleix un valor «únic» o «exacte» ja que es troba influït per diverses condicions que introdueixen fluctuacions aleatòries: les petites variacions de temperatura de la làmpada, la inestabilitat de la font d'alimentació, el soroll electrònic, el funcionament del mateix multímetre, etc. El multímetre de 9 dígits detecta aquestes fluctuacions, i com a conseqüència les darreres xifres en pantalla ballen sense parar; el multímetre de 4 xifres no en detecta, de fluctuacions; però hi són igualment.

D'acord amb aquestes consideracions, la precisió de la mesura i la consegüent atribució d'incertesa en aquest tipus d'experiment varia segons els requeriments concrets i la instrumentació disponible. Si utilitzem un multímetre de mà de 4 dígits, la repetició de la mesura no aporta res. Farem una única mesura i hi atribuirem la incertesa instrumental (Secció 4.2).

Si en canvi disposem del multímetre de 9 dígits podem actuar de diverses maneres. Si decidim efectuar una única mesura, la simple lectura de les xifres estables, ja dóna un resultat més precís que abans.

També podem tractar d'afinar més efectuant *múltiples* mesures per obtenir una determinació del corrent molt precisa i acurada. En aquest cas

hem de tenir en compte altres factors. Procurarem optimitzar les condicions experimentals: aïllem els cables, comprovem els contactes, utilitzem una font d'alimentació d'estabilitat garantida, situem la làmpada en un ambient ben controlat, ... D'aquesta manera reduïm al mínim els errors sistemàtics, i podem atribuir les fluctuacions observades a errors aleatoris de la mesura. L'enregistrament quasi-continu dels valors del corrent proporcionarà un patró semblant al de la Fig. 2.2, i valdrà la pena efectuar una caracterització completa de la distribució de les dades, de la manera que veurem a la Secció 4.3, a fi de fer una estimació molt precisa de la incertesa que afecta el valor acceptat del corrent, el qual vindrà donat per la mitjana de les dades, segons hem vist més amunt.

## 4.2 Incertesa instrumental

En els procediments rutinaris d'experimentació només fem una mesura de cada quantitat. Si és menester s'efectuen una sèrie de mesures exploratòries per a comprovar que la quantitat a mesurar és estable (el procés de mesura és estable si la lectura dels instruments no varia apreciablement durant un interval de temps escollit). Sovint l'estabilitat de les mesures s'estima intuïtivament sobre la base d'observacions prolongades. Siga com siga, la mesura única es troba ben fonamentada per l'experiència, concentrada en la construcció dels corresponents instruments, que estan construïts de manera que es pugui realitzar la mesura única (Rabinovich, 1995). L'element principal de la incertesa en la mesura única està associat a la limitació de precisió de la instrumentació.

Un mètode ràpid d'assignació d'incertesa instrumental és atribuir la *mínima lectura* (diferent de 0) que pot fer l'instrument, en el mode d'operació considerat. D'aquesta manera la mínima divisió de l'escala determina l'error, com es fa en l'Exemple 4.1. Aquest és l'*error d'escala*.

---

### Exemple 4.1

Llegim en un amperímetre de mà (Fig. 4.1.a)

$$I = 12,34$$

quan l'escala està en la posició de miliampers. Donem com a resultat de la mesura

$$I = (12,34 \pm 0,01) \text{ mA.}$$


---

Per a fer una assignació més exacta de l'error que afecta la lectura d'un instrument, haurem d'acudir a les especificacions tècniques de l'aparell. En la Fig. 4.3 es donen aquestes estipulacions per a l'instrument de la Fig. 4.1.b.

Per causa de la seua estructura, l'error absolut de les mesures conté dos termes: l'un proporcional al valor de la lectura  $L$  i l'altre proporcional al



valor del fons d'escala de l'aparell  $FE$  (màxima lectura en una escala determinada):

$$\varepsilon(L) = a \cdot L + b \cdot FE \quad (4.2)$$

o, en forma d'error relatiu,

$$\varepsilon_r(L) = a + \frac{b}{L/FE} \quad (4.3)$$

En l'última expressió s'observa que la precisió de l'instrument augmenta quan les lectures s'aproximen al valor del fons d'escala, ja que el terme  $L/FE$  tendeix a 1.

**Fig. 4.3** Especificacions tècniques del multímetre de taula HP 3458 (Fig. 4.2.b). Observem que els errors de mesuratge de l'instrument depenen, entre altres factors, del fons d'escala en què es mesura\*.

#### Abbreviated Technical Specifications

##### dc Voltage

Range	Full Scale	Maximum Resolution	1-Year* Accuracy	Transfer Accuracy 10 min, Tref ± 0.5° C	Input Impedance
			ppm of reading + ppm of range		
100 mV	120.00000	10 nV	9(5) + 3	0.5 + 0.5	> 10 G Ω
1 V	1.20000000	10 nV	8(4) + 0.3	0.3 + 0.1	> 10 G Ω
10 V	12.0000000	100 nV	8(4) + 0.05	0.05 + 0.05	> 10 G Ω
100 V	120.000000	1 μV	10(6) + 0.3	0.5 + 0.1	10 M Ω ± 1%
1000 V	1050.00000	10 μV	10(6) + 0.1	1.5 + 0.05	10 M Ω ± 1%

One-year specifications for NPLC 100 within 24 hours and ± 1° C of last ACAL, Tcal ± 5° C, MATH NULL, fixed range. Add 2 ppm of reading additional error for HP factory traceability of 10 V dc to US NIST. Traceability error is the absolute error relative to National Standards associated with the source of last external calibration. Transfer specifications for NPLC 100, following 4-hour warm-up. Full scale to 10% of full scale. Measurements on the 1000 V range are within 5% of the initial measurement value and following measurement settling. Tref is the starting ambient temperature. Measurements are made on a fixed range using accepted metrology practices.  
\*High stability (Option 002) ppm of reading in parentheses.

Les especificacions tècniques de l'aparell hauran de facilitar el valor dels paràmetres  $a$  i  $b$  en cada escala de mesura. Això es fa habitualment de dues maneres diferents: directament, en % o en ppm respecte de  $L$  i  $FE$  (com és el cas de l'instrument de la Fig. 4.1), o donant el nombre de comptes d'error  $N$ . En aquest últim cas, el valor del paràmetre  $b$  es calcula considerant el nombre de dígitos enters de l'aparell  $d$ ,  $b = N / 10^d$ .

#### Exemple 4.2.

Realitzem una mesura de voltatge de 97.44 mV amb un multímetre. Les especificacions de l'aparell indiquen el valor dels errors que cometem en funció de l'escala (vegeu la taula següent).

\* Val a dir que l'abreviatura *ppm* no té en anglès el mateix significat que en les llengües llatines. En anglès indica parts per milió mentre que en català significa parts per mil. Encara que àmpliament usat, és un símbol no reconegut pel SI.

<i>escala</i>	<i>ppm de lectura</i>	<i>ppm del fons d'escala</i>
100 mV	9	3
1 V	8	0,3
10 V	9	0,3

¿Quin error associarem a la lectura en les escales (*range*) de 100 mV i d'1 V?

a) Escala de 100 mV ( $FE = 100$ )  $\varepsilon(L) = 0,009 \times 97,44 + 0,003 \times 100 = 1,18$ .

Per tant el resultat és  $(97,4 \pm 1,2)$  mV.

b) Escala d'1 V ( $FE = 1$ )  $\varepsilon(L) = 0,008 \times 97,44 + 0,0003 \times 1000 = 1,08$ .

En aquest cas el resultat és  $(97,4 \pm 1,1)$  mV.

### 4.3 Múltiples mesures d'una quantitat

Tot i el que hem dit respecte de la mesura única en la secció precedent, sovint existeixen raons per a efectuar múltiples mesures d'una quantitat. Això ocorrerà:

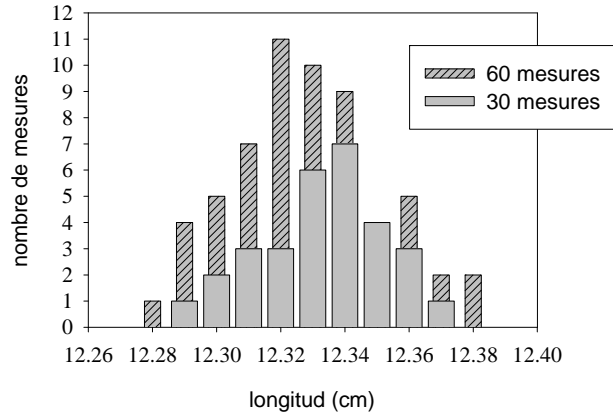
- Quan investiguem un fenomen nou, o un nou objecte, i estem determinant les relacions entre les quantitats que caracteritzen l'objecte i altres quantitats físiques. Aquestes mesures poden anomenar-se *mesures preliminars*; tractem d'establir les condicions en les quals un fenomen podrà ser repetidament observat i confirmat en altres laboratoris. Les mesures preliminars d'aquesta mena són essencials quan construïm un model d'un objecte o fenomen.
- Quan el problema de mesura requereix la determinació d'un valor mitjà (per exemple si mesurem una col·lecció de peces semblants).
- Quan volem reduir l'efecte dels errors aleatoris de l'instrument (per exemple durant el calibratge).
- En mesuraments en els quals no s'han desenvolupat instruments de mesura.

Si repetim moltes voltes la mesura de la quantitat  $x$  i obtenim sempre mesures diferents, la quantitat  $x$  només es pot caracteritzar estadísticament, és a dir, especificant quina probabilitat hi ha de trobar un resultat de la mesura comprès entre dos valors  $a$  i  $b$  especificats,  $\wp(a \leq x \leq b)$ . Per tant, esperem obtenir una *distribució* de les dades. Vegeu que l'estem tractant com una variable aleatòria.

Per a caracteritzar estadísticament la magnitud  $x$  cal la realització d'un nombre de mesures  $n$ , gran (idealment infinites). La manera habitual consisteix a construir un *histograma* de les dades. Dividirem l'interval complet de variació de la magnitud  $x$  en una sèrie d'interval i determinarem quina fracció del nombre total de mesures cau en cadascun d'aquests

interval·s. Aquest procediment s'anomena compartimentació, l'histograma obtingut estarà centrat al voltant d'un cert valor i amb una amplada (*dispersió*) que reflecteix les fluctuacions existents entre diferents mesuraments, vegeu la Fig. 4.3.

**Fig. 4.3** Resultat d'efectuar múltiples mesures de la llargària d'una barra. Es representen els histogrames corresponents a dos mesuraments diferents, l'un amb 30 mesures i l'altre amb 60, amb una compartimentació en intervals de 0,01 cm.



#### A La distribució límit

En el límit ideal d'un nombre infinit de mesures i amplària dels subinterval·s tendint a 0, l'histograma esdevé una funció contínua anomenada *distribució límit*.

Hi ha dos paràmetres primordials associats a una distribució límit. El primer és la mitjana del conjunt de dades  $x_1, x_2, \dots$ ,

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum x_i \right). \quad (4.4)$$

El segon paràmetre important és la *desviació estàndard*  $\sigma$  (*standard deviation*, abreviat SD), que determina la dispersió en la població infinita al voltant del valor central, segons vam veure a la Secció 2.2. Definim primer la *desviació* de cadascuna de les dades  $x_i$  de la mitjana

$$d_i = x_i - \mu. \quad (4.5)$$

Si prenem el valor mitjà de les desviacions en la població infinita, el resultat és 0 segons la definició de valor mitjà,

$$\langle d \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum x_i \right) - \mu = 0. \quad (4.6)$$

Per tant el paràmetre  $\langle d \rangle$  no és útil per a descriure la dispersió de les dades, ja que les desviacions positives es compensen amb les negatives. Es

pot solucionar aquesta dificultat calculant el valor mitjà del valor absolut de les desviacions individuals, però la funció valor absolut és força inconvenient des del punt de vista del càlcul numèric. Una mesura més apropiada de la dispersió és el valor mitjà del quadrat de les desviacions, anomenada *variància*  $\sigma^2$ , que està definida com

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum x_i^2 \right) - \mu^2. \quad (4.7)$$

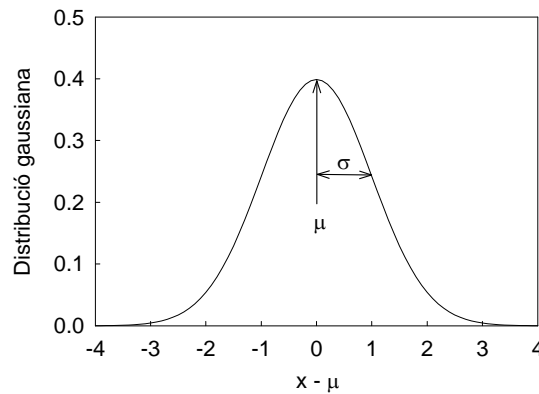
La desviació estàndard  $\sigma$  és la raïl quadrada de la variància.

Existeixen diversos tipus de distribucions límit, que en cada cas reflexen les propietats bàsiques del procés aleatori. La distribució que més comunament, de bon tros, descriu les dades experimentals afectades per errors aleatoris, és la *distribució normal* o *de Gauss*, en què la probabilitat de trobar el resultat de la mesura en l'interval comprès entre  $x$  i  $x + dx$  és

$$P_G(x; \mu; \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (4.8)$$

Aquesta distribució s'ha representat en la Fig. 4.4.

**Fig. 4.4** Representació de la distribució normal. Cada divisió de l'eix  $x$  correspon a una unitat  $\sigma$ .



La distribució normal (4.8) queda totalment determinada quan especifiquem els dos paràmetres  $\mu$  i  $\sigma$  (mitjana i desviació estàndard). La distribució és simètrica al voltant del pic, el qual es situa en  $x = \mu$ , i l'amplada de la corba està determinada per  $\sigma$ , com s'aprecia en la Fig. 4.4.

La distribució normal fixa com és la probabilitat que un element de la població caiga dins un interval de valors determinat. Per exemple a partir de

(4.8) es pot calcular\* la probabilitat d'obtenir un valor en un interval d'amplària  $1\sigma$  a cada costat de la mitjana:

$$\wp(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} P_G(x; \mu; \sigma) dx = 0,68269. \quad (4.9)$$

Si prenem un interval més ample, la probabilitat augmenta:

$$\wp(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = \int_{\mu - 2\sigma}^{\mu + 2\sigma} P_G(x; \mu; \sigma) dx = 0,95449. \quad (4.10)$$

Finalment, si calculem la probabilitat d'obtenir *qualsevol* valor  $x$ , ens dóna 1 (certesa total):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_G(x; \mu; \sigma) dx = 1. \quad (4.11)$$

Aquest darrer resultat s'obté per haver introduït prèviament el factor correcte davant l'exponencial en l'eq. (4.8).

Com veiem en (4.9), en prendre un interval  $1\sigma$  a cada costat de la mitjana la probabilitat que una nova mesura caiga dins l'interval és del 68,3 %; si ens n'anem  $2\sigma$ , aleshores la dita probabilitat o marge de confiança és del 95,5 %. Alternativament, el marge de confiança es pot interpretar com el percentatge del total de mesures (en la població infinita) que hi ha comprès en un interval al voltant de  $\mu$ , segons el nombre de desviacions estàndards de l'interval. En la Taula 4.1 es donen alguns valors del marge de confiança.

**Taula 4.1** Marge de confiança en la distribució normal segons l'interval al voltant de la mitjana.

Interval	% de dades dins l'interval
$[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$	68,3
$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$	95,5
$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$	99,7
$[\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma]$	99,9

Com hem vist anteriorment, donant una distribució límit  $P(x)$  s'estableix que la probabilitat de trobar un resultat  $x$  és  $P(x)dx$ . Per tant si es coneix la forma de la distribució podem calcular el *valor esperat* de la variable. Per a això, multiplicarem cada possible valor per la seua probabilitat, i integrarem

\* Generalment no hi ha necessitat de calcular les integrals de probabilitat com les que apareixen en (4.8) i (4.9), ja que el resultat es troba convenientment tabulat, vegeu per exemple (Bevington, 1992).

sobre tot l'interval:

$$\text{valor esperat} = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx. \quad (4.12)$$

Així determinem el valor més probable de tots els possibles.

En el cas particular de la distribució normal, el càlcul de la integral (4.12) produeix el resultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xP_G(x; \mu; \sigma)dx = \mu. \quad (4.13)$$

Així doncs, quan la població infinita de dades obeeix la distribució normal el valor més probable és precisament la mitjana  $\mu$ .

### *B Estimació de paràmetres amb un conjunt finit de dades*

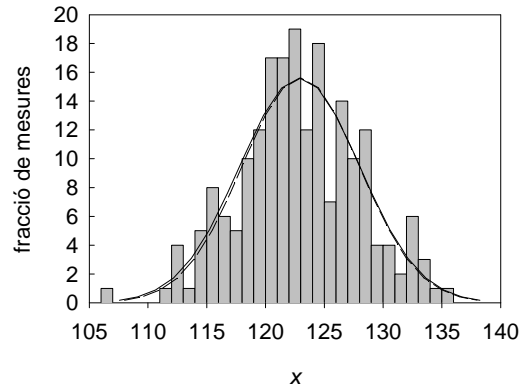
Si el caràcter aleatori de les observacions correspon a errors de la mesura, suposarem que el conjunt de dades que resulta d'una mesura múltiple d'una magnitud és una realització d'una variable aleatòria que segueix la distribució normal.

En principi és possible comprovar si la disposició de dades en l'histograma adopta la forma de la distribució normal; però com aqueixa comprovació requereix un gran nombre de mesures, rarament es fa en la pràctica, i simplement s'assumeix que la distribució és normal.

Amb aquesta hipòtesi, el resultat de la mesura queda completament caracteritzat per dos paràmetres:  $\mu$  i  $\sigma$ , tal com hem vist més amunt. Observem que els dos paràmetres  $\mu$  i  $\sigma$  no són variables aleatòries.

Ara bé, sempre que efectuem una mesura real tenim només un nombre finit de dades  $n$ , i a més no podem reduir l'amplària de l'interval elemental per davall de la precisió instrumental. Per aquests motius un conjunt de dades experimentals no segueix exactament la distribució de Gauss, sols se n'aproxima, com es veu en la Fig. 4.5.

**Fig. 4.5** Distribució d'un conjunt de dades reals i l'ajust a una distribució gaussiana (línia contínua). També s'hi observa la distribució gaussiana en cas d'un nombre infinit de mesures (línia discontinua).



Aleshores, no és possible determinar exactament  $\mu$  ni  $\sigma$ . L'objectiu experimental és determinar la millor estimació de  $\mu$  i la seua incertesa. Per a un conjunt de  $n$  dades  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la millor estimació de  $\mu$  és la mitjana de les dades, donada per

$$x_m = \frac{1}{n} \sum x_i . \quad (4.14)$$

A més, el fet que la mitjana de la població infinita  $\mu$  és el valor més probable, justifica que assenyalem  $x_m$  com el valor acceptat que resulta de la mesura múltiple.

L'estimació de la desviació estàndard del conjunt de dades es fa amb la quantitat  $\sigma_{n-1}$ , definida com

$$\sigma_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - x_m)^2 . \quad (4.15)$$

Moltes voltes s'utilitza el símbol  $s$  amb el mateix significat que  $\sigma_{n-1}$ , és a dir

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - x_m)^2} . \quad (4.16)$$

Observem que en el càlcul de  $s$  intervé la mitjana de les dades,  $x_m$ . Així mateix notem que s'hi utilitza el denominador  $n-1$ , mentre que el denominador és  $n$  en la definició de  $\sigma$ . En situacions normals, l'ús de  $n-1$  en (4.16) proporciona un valor de la desviació estàndard que és estadísticament més proper al valor correcte.

### C Propagació de desviacions estàndard

Reprenem aquí el problema de la propagació d'incerteses en la mesura

indirecta que vam tractar al Cap. 3, per a deduir l'expressió de propagació d'errors aleatoris.

Suposem que hem de determinar la quantitat  $z$  que depén d'altres mesures directament  $x, y, \dots$ , segons l'expressió

$$z = f(x, y, \dots). \quad (3.1)$$

La dispersió de les mesures directes dóna lloc a una distribució de valors calculats per a  $z$ . Podem atribuir a cada mesura individual el seu propi valor resultant de (3.1):

$$z_i = f(x_i, y_i, \dots), \quad (4.17)$$

i suposarem també que el valor més probable de  $z$  ve donat per

$$z_m = f(x_m, y_m, \dots), \quad (3.2)$$

(encara que aquesta darrera expressió no sempre és exacta). La desviació en cada mesura individual es pot trobar per mitjà de la fórmula aproximada (3.5):

$$z_i - z_m = (x_i - x_m) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + (y_i - y_m) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \dots \quad (4.18)$$

El problema que es planteja és donar la dispersió de  $z$  a partir de les dispersions de les variables mesurades, suposant que cadascuna d'aquestes segueix la distribució normal. En el límit d'un nombre infinit de mesures, el valor mitjà coincideix amb la mitjana,  $z_m = \mu_z$ , i la dispersió de  $z$  es descriu per la variància (4.7),

$$\sigma_z^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum (z_i - z_m)^2 \right]. \quad (4.19)$$

Aplicant aquesta darrera fórmula a (4.18), podem escriure la variància de  $z$  com

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ (x_i - x_m) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + (y_i - y_m) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \dots \right]^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ (x_i - x_m)^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (y_i - y_m)^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + 2(x_i - x_m)(y_i - y_m) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

La dispersió de cada variable mesurada es descriu per la respectiva desviació estàndard  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ ,



$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum (x_i - x_m)^2 \right] \\ \sigma_y^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum (y_i - y_m)^2 \right],\end{aligned}\tag{4.21}$$

i el tercer terme de l'eq. (4.20) adoptarà una forma similar en termes de la covariància  $\sigma_{xy}$ ,

$$\sigma_{xy}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum (x_i - x_m)(y_i - y_m) \right],\tag{4.22}$$

Així trobem de (4.20) l'equació de propagació d'errors aleatoris

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \dots + \sigma_{xy}^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \dots\tag{4.23}$$

Els primers dos termes de l'equació donen el valor mitjà del quadrat de les desviacions de  $z$ , produïdes per les dispersions en  $x$  i  $y$ , respectivament; si hi ha d'altres variables donaran lloc a termes semblants. El tercer terme de (4.23) prové del producte creuat de les desviacions de  $x$  i  $y$ . Si les dues variables no estan correlacionades, hi haurà un nombre semblant de contribucions positives i negatives en l'eq. (4.22), i aquest terme s'anul·la. Per tant si el nombre de mesures és prou gran, l'eq. (4.23) es simplifica a

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \dots,\tag{4.24}$$

d'on resulta l'eq. (3.10), que va ser discutida en el capítol anterior.

#### D Error estàndard de la mitjana

Tornant a la mesura directa, l'atribució d'incertesa al valor acceptat  $x_m$  es pot fer de dues maneres; el seu significat és diferent, i la tria depèn de les aplicacions.

En primer lloc, podem donar directament la desviació estàndard  $s$  tal com l'hem estimada amb (4.16). Aleshores reportem que la incertesa atribuïda és  $1\sigma$ . Amb aquest procediments, l'interval de delimitació de l'error és probabilístic, és un interval de confiança, en el sentit que informa de la probabilitat de trobar una mesura dins l'interval. Si decidim expressar la incertesa d'aquesta manera, s'haurà d'especificar clarament, ja que el sistema comú és un altre.

El procediment que més s'utilitza és donar l'*error estàndard de la mitjana*. Recordem que  $x_m$  és una estimació de  $\mu$  a partir del conjunt de  $n$  dades. Això vol dir que si repetim l'experiment, prenent una altra col·lecció de dades, el nou valor mitjà no coincidirà exactament amb l'anterior. Però si

revisem les Figs. 4.4 i 4.5, de seguida ens adonem que amb un nombre raonable de dades la precisió amb la qual podem determinar el valor mitjà és molt millor que  $\pm\sigma$ . Per tant volem fer una estimació  $\sigma_\mu$  de les desviacions de la mitjana. Amb aquesta finalitat considerem la mitjana com un càlcul indirecte i apliquem l'equació de propagació d'errors aleatoris vista més amunt, (4.24). Així obtenim

$$\sigma_\mu^2 = \sum \left( \frac{\partial x_m}{\partial x_i} \right)^2 \varepsilon_x^2, \quad (4.25)$$

on hem suposat que totes les dades  $x_i$  estan afectades pel mateix error  $\varepsilon_x$ . Si tenim en compte l'eq. (4.14), el càlcul de (4.25) dóna

$$\sigma_\mu = \frac{\varepsilon_x}{\sqrt{n}}. \quad (4.26)$$

L'equació (4.26) indica que la desviació de la mitjana disminueix quan augmenta el nombre de dades. Aquest resultat és lògic: com més dades reunim, coneixem la mitjana amb més exactitud.

L'estimació de l'error de les mesures individuals  $\varepsilon_x$  es pot fer a partir de la consideració de l'equipament de mesuratge, o bé a partir de les dades mesurades. En tal cas

$$\sigma_\mu = \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (4.27)$$

El valor de  $\varepsilon_x$  estimat amb  $s$  de l'eq. (4.16) hauria de ser consistent amb l'estimació a partir de l'equipament experimental, i en particular amb la precisió de l'instrument.

L'error estàndard de la mitjana es dóna a partir de (4.26) com

$$\varepsilon(x_m) = 2\sigma_\mu = \frac{2s}{\sqrt{n}} \quad (4.28)$$

Aquest criteri comporta un marge de confiança del 95 % per a la dispersió de la mitjana.

#### Exemple 4.4

Per al conjunt de dades amb  $n = 30$  representat en l'histograma de la Fig. 4.3, trobem els valors:

$$x_m = 12,333$$

$$s = 0,0158$$

a) Donem el valor acceptat amb incertesa  $1\sigma$ :

$$x_m = (12,333 \pm 0,016) \text{ cm}.$$

b) Donem el valor acceptat amb l'error estàndard de la mitjana. Calculem la desviació de la mitjana i obtenim

$$\sigma_{\mu} = \frac{s}{\sqrt{30}} = 0,00288$$

i l'error de la mitjana (marge de 95 %) és

$$\varepsilon(x_m) = 2\sigma_{\mu} = 0,00576 .$$

Per tant expressem el resultat com

$$x_m = (12,333 \pm 0,006) \text{ cm} .$$

---

A partir del resultat (4.28) fa la sensació que podem reduir la incertesa a voluntat, si fem prou mesures, cosa que pareix un poc absurda. De fet trobem diverses limitacions per a aplicar (4.28) a fi de reduir l'error de la mitjana. En qualsevol experiment hi ha un límit de precisió imposat per petits errors sistemàtics sobre els que no tenim control ni coneixement. A més l'estricta aplicació de l'eq. (4.28) requereix l'exacte obeïment de la distribució normal.

#### 4.4 Quan el nombre de mesures és petit

En la pràctica, també és comú fer un nombre petit de mesures, 2 o 3. Aquesta no es una mesura única, ni tampoc produeix prou quantitat de dades com per a dur a terme l'anàlisi estadística. Però sovint té sentit repetir unes quantes voltes la mesura, ja que així, si hi apareix poca dispersió, es comprova que el mètode de mesura és apropiat i que el model seleccionat funciona correctament. Quan fem diverses mesures, òbviament les aprofitarem i donarem la mitjana d'aquestes mesures com a valor acceptat.

Pel que fa als criteris sobre el nombre concret de mesures i la consegüent atribució d'incertesa, un procediment comú és el següent. Solen fer-se 3 mesures d'una quantitat. Si, per causa de la precisió de l'instrument cauen totes dins el mateix interval, no caldrà prendre'n més i la pròpia incertesa de l'instrument ens servirà. Si observem dispersió haurem de realitzar 10 mesures com a mínim. Això permet calcular  $x_m$  i  $s$ . Si cap mesura es separa més de  $2s$  de  $x_m$ , aleshores s'accepta la població i es calcula l'error estàndard de la mitjana.

Si les desviacions són grans, cal incrementar la mida de la població obtenint més dades, o bé questionar la validesa del mètode de mesura.

#### Problemes

- 4.1 Volem determinar quin dels dos multímetres digitals que tenim és més exacte a l'hora d'efectuar unes mesures de voltatge  $V$ . El primer instrument ens especificuen que posseeix un error absolut de l'1% de la lectura més el 0,1% del fons d'escala. El segon, en canvi, té un error absolut del 0,5% de la lectura més el 0,2% del fons d'escala. Mesurem en l'escala de 10 V amb tots dos, ¿quin és més precís si les lectures són 0,91 V, 2,00 V i 7,53 V?

---

# Mètodes d'ajust d'un conjunt de punts a una funció

---

## 5.1 La validació de models i la determinació de paràmetres

### A Modelatge amb relacions analítiques

En el Cap. 1 hem ressaltat la importància dels models en l'experimentació. Moltes vegades el model adopta la forma d'una relació analítica que conté variables i paràmetres. Per a simplificar, suposem que hi ha només dues variables rellevants,  $x$  i  $y$ , i diversos paràmetres  $a$ ,  $b$ , ... (Els paràmetres haurien de romandre constants en tant que canvien les variables del sistema.) Aleshores el model, sobre la base de les hipòtesis físiques pertinents, establirà la funcionalitat de la variable dependent  $y$  respecte de la variable independent  $x$  i els paràmetres:

$$y = f(x; a, b, \dots) \quad (5.1)$$

L'adopció d'un model com (5.1) per a descriure un fenomen és una etapa fonamental en la comprensió i tractament de la situació, ja que ens proporciona un mecanisme d'anàlisi quantitatiu. Alhora, la selecció de determinades variables, paràmetres i la seua dependència comporta riscos evidents: tot model és una simplificació que descarta diversos aspectes del sistema real; la relació postulada podria ser vàlida només aproximadament en el cas que se'ns presenta, o totalment incorrecta si ens hem equivocat en les nostres suposicions. Segons aquestes consideracions, trobem dues vessants principals en l'aplicació dels models:

- a) La comprovació de la validesa d'aplicació de la relació suposada en la situació concreta.
- b) La determinació de paràmetres a partir de la mesura de les variables.

La realització d'aquests dos aspectes es pot dur a terme amb la mesura (única o múltiple) de valors únics de  $x$  i  $y$ . Respecte del punt (a), ja hem vist en la Sec. 4.4 que podem repetir la mesura algunes vegades per a comprovar que el model s'hi aplica. Així per exemple, si volem mesurar el diàmetre d'una peça circular, és lògic que prengam la mida del diàmetre amb diferents orientacions, a fi de cercionar-nos que el model geomètric (un cercle, en

aquest cas), descriu la peça efectivament. I pel que fa al punt (b), la determinació d'un paràmetre és un cas de mesura indirecta (Cap. 3), quan aquest paràmetre és l'única incògnita en la relació (5.1) després d'haver mesurat directament.

Tanmateix, quan l'objecte d'experimentació ens permet modificar controladament les variables del model (la temperatura, el corrent elèctric en un circuit, etc.), existeix una manera molt més efectiva de realitzar els punts (a) i (b), que consisteix a provocar la variació de  $x$ , i observar els corresponents valors de  $y$ . D'aquesta manera, obtenim un conjunt de  $n$  punts experimentals *distints*

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \quad (5.2)$$

i podem així (a) analitzar si els punts mesurats segueixen la relació analítica postulada (sobretot amb l'ajut de la representació gràfica, vegeu la Sec. 7.3), i (b) obtenir una determinació molt afinada dels paràmetres per mitjà dels *mètodes d'ajust* que veurem més avall.

Per fer-nos una idea preliminar del guany que comporta la variació controlada de les magnituds experimentals, examinarem un exemple elemental. Suposem que hem d'estudiar les propietats elàstiques d'una molla comuna. Per a això, mesurem la longitud de la molla sense massa ( $L_0$ ) i en acabant suspenem la molla per un cap i pengem una massa coneguda  $M$  de l'altre, i tornem a mesurar la longitud de la molla ( $L$ ), sempre en equilibri. El model més simple d'aquest fenomen és la relació lineal

$$Mg = k \Delta L \quad (5.3)$$

segons la qual s'equilibren el pes del cos penjant i la força elàstica de la molla (descrita per la llei de Hooke). En l'eq. (5.3),  $g$  és l'acceleració de la gravetat,  $k$  és la constant elàstica de la molla, i s'hi ha introduït l'elongació de la molla  $\Delta L = L - L_0$ . Clarament el model (5.3) té un únic paràmetre,  $k$ , que caracteritza les propietats de la molla. Si la mesura amb  $M = (100,0 \pm 0,5) \text{ g}$  dóna el resultat  $x = (1,64 \pm 0,15) \text{ cm}$ , obtenim per aplicació de (5.3):

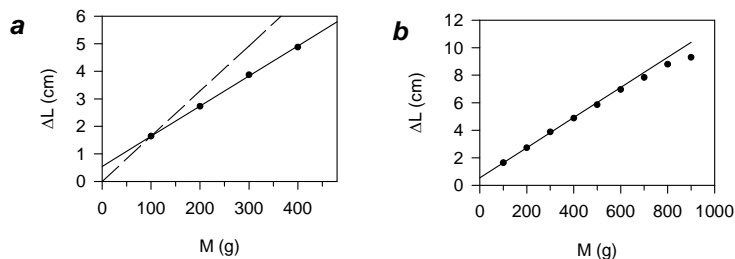
$$k = (60 \pm 6) \text{ N m}^{-1} \quad (5.4)$$

Però amb aquesta metodologia, ens quedem sense saber si (5.3) descriu correctament l'estirament de la molla, encara que repetim l'experiment indicat diverses vegades. Una manera òbvia d'obtenir més informació serà incrementar progressivament la massa  $M$ . Ja que aleshores, tenim dos criteris que es dedueixen de (5.3) i que han de ser obeïts pels punts experimentals:

- La representació gràfica de  $x$  enfront de  $M$  ha de traçar una recta.
- La recta ha de passar per l'origen (0, 0).

Si ara efectuem mesures addicionals cada 100 g fins a 400 g, els resultats que es mostren en la Fig. 5.1.a indiquen una greu anomalia en el model representat per l'eq. (5.3). Els punts experimentals segueixen correctament una recta (línia contínua), i doncs acompleixen el primer requeriment, però la recta talla la línia  $M = 0$  g a un valor diferent de zero, contràriament al que prediu (5.3). Aquesta elongació de  $\Delta L \approx 0,6$  cm sense massa aplicada és excessiva com per atribuir-la a l'error de la mesura.

**Fig. 5.1** Representació de l'elongació d'una molla en funció de la massa penjant. (a) La línia contínua és la que ajusta els 4 punts mostrats, la línia de traços és la recta que passa per l'origen i pel punt amb  $M = 100$  g. (b) Es mostren els mateixos resultats que en (a), amb més punts experimentals.



A la vista del resultat anterior no hi ha més remei que revisar el model. Examinant la Fig. 5.1.a ens adonem que les dades estan ben descrites per una equació del tipus

$$Mg + c = k \Delta L \quad (5.5)$$

on  $c$  és una constant, de manera que el nou model té dos paràmetres,  $k$  i  $c$ . A més, el model (5.5) és raonable ja que quan pengem la molla (i abans d'afegir les peces), aquesta adquireix una certa elongació per la seua pròpia massa. Així doncs el paràmetre  $c$  només té un interès marginal per als objectius de l'anàlisi, però la seua inclusió en el model és essencial per a quadrar les dades. Quan determinem  $k$  amb el model (5.5), fent ús dels mètodes que veurem més avall, obtenim

$$k = (89,7 \pm 1,2) \text{ N m}^{-1} \quad (5.6)$$

Aquesta determinació de  $k$  es basa en l'avaluació del pendent de la recta representada en la Fig. 5.1.a, i podem argumentar que és molt fiable, ja que el segon model ajusta perfectament les dades, com ho demostra el fet que els punts experimentals queden molt a prop de la línia contínua.

També convé assenyalar que la incertesa estimada en la determinació (5.6) es redueix notablement respecte de (5.4), ja que en (5.6) estimem la incertesa a partir de la dispersió del *conjunt* de punts al voltant de la recta, com veurem més avall. Com més alineats són els punts, més precisió tenim sobre el paràmetre  $k$ .

Retrospectivament veiem que havíem comés un error dràstic del  $\approx 30\%$  en la determinació (5.4). En utilitzar (5.3), havíem treballat amb el pendent de la recta que passa per l'origen i per l'únic punt considerat (la recta de traços en la Fig. 5.1.a). És evident en la Fig. 5.1.a que el pendent d'aquesta recta és força diferent del de la recta bona.

Eventualment pot fallar el model (5.5); si continuem prenent mesures de 100 en 100 g, veurem que els punts es desvien de la recta, com en la Fig. 5.1.b. Aquest és un efecte ben conegut: la molla deixa d'obeir la llei de Hooke quan la massa total aplicada és major que un cert valor. Per a donar compte de la petita corbatura en la Fig. 5.1.b s'hauria d'intentar un model amb un paràmetre addicional  $d$ , com és ara

$$Mg + c = k \Delta L - d \Delta L^3 . \quad (5.7)$$

Amb tot, el model (5.5) és perfectament vàlid, com hem vist, dins d'un cert domini de valors de  $M$ .

### B El problema general de l'ajust

L'exemple que acabem d'examinar és arquetípic d'un problema que es planteja contínuament. Hem mesurat  $n$  punts experimentals distints,  $(x_i, y_i)$ , i tenim una funció model  $y = y(x; a, b, \dots)$  que suposadament descriu les dades. Els paràmetres governen la variació de les magnituds, i a més, sovint els atribuïm una interpretació física en termes de les propietats del sistema. El problema consisteix a determinar els valors dels paràmetres que fan que la funció  $y(x)$  s'acoste el més possible a les dades experimentals. Ens referim a aquest problema dient que hem d'*ajustar* els punts experimentals amb la funció  $y(x)$ .

Una decisió bàsica per a ajustar un conjunt de punts és el *tipus* de funció que s'hi utilitzarà: si farem servir una recta, o una paràbola, o una exponencial, etc. L'elecció del model pot respondre a la nostra experiència prèvia, o a les hipòtesis físiques realitzades *a priori*, o a l'anàlisi directa de les dades. En qualsevol cas, cada relació té un nombre donat de paràmetres  $a$ ,  $b$ , ... Per exemple, la relaxió de proporcionalitat en té un

$$y = ax , \quad (5.8)$$

una recta en té dos,

$$y = ax + b , \quad (5.9)$$

i una paràbola en té tres, de paràmetres:

$$y = ax^2 + bx + c . \quad (5.10)$$

El nombre de paràmetres lliures és un factor important de l'anàlisi, ja que



generalment, com més paràmetres es deixen lliures, més facilitat tindrà la funció model per a adaptar-se als punts experimentals. El model amb *menor* nombre de paràmetres és preferible, a igualtat d'altres condicions.

Un altre punt crucial és el criteri que acordem per a trobar el valor òptim dels paràmetres. El més comú és el *mètode de mínims quadrats*. Considerem les desviacions entre el punt experimental i el corresponent punt de la corba d'ajust

$$\Delta y_i = y_i - y(x_i) \quad (5.11)$$

i busquem els valors dels paràmetres que minimitzen la quantitat

$$R = \sum \Delta y_i^2 . \quad (5.12)$$

Aquí, s'utilitza el quadrat de les desviacions per a evitar la compensació de les desviacions entre els punts que cauen a costats diferents de la corba.

A continuació veurem l'aplicació del mètode de mínims quadrats quan la funció d'ajust és una recta.

## 5.2 Regressió lineal

### A Càlcul dels paràmetres de la regressió

Considerem el cas en què s'espera que les magnituds  $x$  i  $y$  complisquen una relació lineal,

$$y = ax + b \quad (5.13)$$

Volem trobar els paràmetres  $a$  i  $b$  que donen la recta que «millor» ajusta els punts experimentals, per aplicació del mètode de mínims quadrats. Les desviacions de cada punt de la recta són

$$\Delta y_i = y_i - y(x_i) = y_i - ax_i - b \quad (5.14)$$

Busquem els paràmetres  $a$  i  $b$  que minimitzen el sumatori dels quadrats de les desviacions

$$R = \sum \Delta y_i^2 = \sum (y_i - ax_i - b)^2 \quad (5.15)$$

El mínim de  $R$  vindrà donat per les equacions:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial b} = 0, \quad (5.16)$$

i la solució és:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (5.17)$$

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n} \quad (5.18)$$

### B Error dels paràmetres de regressió

Considerem, ara, els errors que assignarem a  $a$  i a  $b$ . L'error d'aquests paràmetres depèn dels errors que tenen les dades mateixes  $(x_i, y_i)$ . Generalment són més importants els errors de la variable dependent,  $\varepsilon(y_i)$ .

Però l'error dels paràmetres també pot ser estimat a partir de la dispersió dels punts experimentals respecte de la recta resultant de l'ajust. La quantitat

$$\sigma_y^2 \approx s_y^2 = \frac{1}{n-2} \sum (y_i - ax_i - b)^2 \quad (5.19)$$

representa aproximadament els errors dels  $y_i$ .

Per mitjà de l'expressió de propagació d'errors aleatoris, eq. (3.10), s'obtenen, a partir de les eqs. (5.17), (5.18) i (5.19), els següents resultats:

$$\varepsilon_a^2 = n \frac{s_y^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_b^2 = \frac{s_y^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sum x_i^2 \quad (5.21)$$

El coeficient de correlació  $r$  ( $0 \leq |r| \leq 1$ ) és un nombre que indica la bondat de l'ajust:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left\{ \left[ \sum (x_i - \bar{x})^2 \right] \left[ \sum (y_i - \bar{y})^2 \right] \right\}^{1/2}} \quad (5.22)$$

Si  $x_i$  y  $y_i$  són variables que no estan correlacionades llavors  $|r|$  tendeix a zero, mentre que si la correlació és lineal tendeix a 1. Aquest coeficient aprofita per a calcular l'error dels paràmetres de la regressió, mitjançant les següents expressions:

$$\varepsilon_a = \frac{|a|}{\sqrt{n-2}} \tan [\arccos(r)]. \quad (5.23)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_a \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2} \quad (5.24)$$

Un punt al qual s'ha de parar especial consideració és que el resultat de la regressió (els paràmetres de la recta amb el seu error) no coincideix generalment amb els paràmetres físics que estem interessats a saber. Per exemple si la relació teòrica entre la longitud d'una barra i la seua

temperatura és

$$L = L_0(1 + \alpha T) \quad (5.25)$$

la regressió donarà el resultat

$$L = b + aT \quad (5.26)$$

i per tant per a determinar  $L_0$  i  $\alpha$  a partir de  $a$  i  $b$  s'han d'utilitzar les relacions funcionals que es dedueixen de comparar (5.25) i (5.26), i el mètode de determinació d'errors indirectes, com s'aprecia amb l'Exemple 5.1.

### C Realització de l'ajust amb l'ordinador

Fent ús de l'ordinador i del software adequat, només cal teclejar els valors de  $x$  i  $y$ , i s'obtenen immediatament el gràfic, els paràmetres de regressió, i el coeficient de correlació, que permet calcular els errors de  $a$  i  $b$ . Alguns dels software de tractament de dades per a PC que més s'utilitzen són: Mathcad, Grapher, Origin, SigmaPlot i Excell. A més aquests programes disposen d'una llibreria de funcions que permet seleccionar la funció d'ajust (recta, paràbola, exponencial...).

També val la pena comentar que la majoria de calculadores manuals donen els paràmetres de regressió i el coeficient de correlació d'un conjunt de punts.

El càlcul de paràmetres de regressió involucra llargues operacions, o alternativament introducció de dades a l'ordinador..., és fàcil confondre's en algun punt, i per tant convé comprovar el resultat de l'ajust fent una estimació independent dels paràmetres, que és una cosa bastant senzilla: per exemple el pendent s'estima com  $\Delta y / \Delta x$  prenent dos punts bastant allunyats. Donem més detalls sobre estimació de pendents a la Secció 6.2.

---

#### Exemple 5.1

Fem 5 mesures de la longitud  $L$  d'una vareta metàl·lica en funció de la temperatura  $T$ . S'espera que la dilatació tèrmica segueixca l'expressió

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta T)$$

on  $L_0$  és la longitud a una certa temperatura inicial  $T_0$  (per exemple,  $0^\circ \text{C}$ ),  $\alpha$  és el coeficient d'expansió tèrmica del material, i  $\Delta T = T - T_0$ . Volem trobar la millor estimació del valor dels paràmetres  $\alpha$  i  $L_0$ , i de l'error comès.

Calculem les quantitats que apareixen en les eqs. (5.14) i (5.15):

$i$	$T_i$ (C)	$L_i$ (cm)	$T_i^2$	$T_i L_i$
1	0	100,213	0	0
2	50	100,261	2500	5013,05
3	100	100,302	10000	10030,2
4	150	100,372	22500	15055,8
5	200	100,417	40000	20083,4
Suma	500	501,565	75000	50182,4

Determinem el paràmetres de la regressió:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{5 \times 50182,4 - 500 \times 501,565}{5 \times 75000 - 500^2} = 1,03767 \times 10^{-3}$$

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n} = \frac{501,565 - 1,036 \times 10^{-3} \times 500}{5} = 100,2094$$

i els corresponents errors:

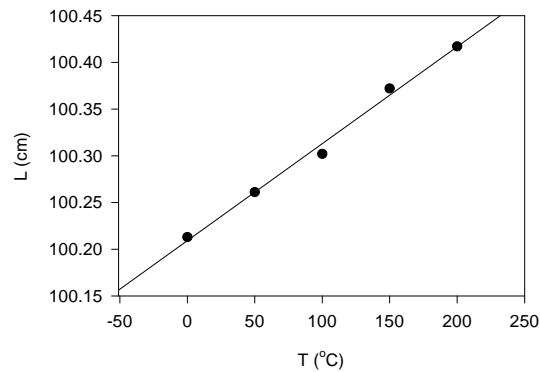
$$s_y = 7,86 \times 10^{-3}, \quad \varepsilon_a = 5 \times 10^{-5}, \quad \varepsilon_b = 6 \times 10^{-3}.$$

Escrivim els resultats de l'ajust:

$$a = (10,4 \pm 0,5) \text{ cm C}^{-1},$$

$$b = (100,209 \pm 0,006) \text{ cm}.$$

**Fig. 5.1** Exemple 5.1. Longitud d'una vareta en funció de la temperatura. La recta correspon a una regressió lineal dels punts.



Per a establir la relació dels paràmetres físics amb els paràmetres de regressió comparem (5.22) i (5.23) i així trobem

$$L_0 = b;$$

$$\alpha = \frac{a}{L_0}.$$

Per tant  $L_0$  ja està determinat amb el seu error, i a més

$$\alpha = \frac{a}{L_0} = 1,0355 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Per al càlcul de l'error de  $\alpha$  utilitzem el mètode dels logaritmes:

$$\frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} = \frac{\varepsilon_a}{a} + \frac{\varepsilon_{L_0}}{L_0} = 0,05 + 0,00006 = 0,05$$

$$\varepsilon_\alpha = 5 \times 10^{-7}$$

i el resultat és

$$\alpha = (10,4 \pm 0,5) \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Alternativament, es pot realitzar l'ajust amb un programa d'ordinador. El resultat que dona el programa d'ajust després d'introduir-hi les dades, és el següent:

$$b = 100.2092,$$

$$a = 1,038 \text{ e-}3,$$

$$r^2 = 0,9931457862.$$

El càlcul de l'error es pot fer amb les Eqs. (5.20) i (5.21):

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{|a|}{\sqrt{n-2}} \tan[\arccos(r)] \\ &= \frac{0,001038}{\sqrt{3}} \tan[\arccos(0,99657)] = 4,9 \times 10^{-5} \text{ cm } ^\circ\text{C}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \varepsilon_a \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2} = 5 \times 10^{-5} \times \sqrt{\frac{75000}{5}} \\ &= 6,1 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-3} \text{ cm.} \end{aligned}$$

#### D Ajust amb altres funcions per mitjà de linealització

La regressió lineal aprofita també per a ajustar dades a altres tipus de funcions a banda de la recta de l'eq. (5.13).

Efectivament, hi ha funcions que poden ser *linealitzades* aplicant una transformació matemàtica a les dades, és a dir, fent els canvis de variable apropiats. Alguns casos usuals es donen en la Taula 5.1. Així, per exemple, si esperem que les dades ajusten a una relació del tipus  $y = ce^{dx}$ , aleshores calcularem  $y'_i = \ln y_i$ ; farem la regressió lineal del conjunt de punts,  $(x_i, y'_i)$  d'on traurem  $a$  i  $b$ , i finalment calcularem  $c$  i  $d$  de les relacions  $c = e^b$ ;  $d = a$ .

**Taula 5.1** Linearització de funcions de dos paràmetres.

relació	transformació	fórmula d'ajust
$y = ce^{dx}$	$\ln y = \ln c + dx$	$y' = (\ln c) + dx$
$y = cd^x$	$\ln y = \ln c + (\ln d)x$	$y' = (\ln c) + (\ln d)x$
$y = \frac{1}{c + dx}$	$\frac{1}{y} = c + dx$	$y' = c + dx$
$y = a + bx^2$	$x' = x^2$	$y = a + bx'$
$y = \sqrt{a + bx}$	$y^2 = a + bx$	$y' = a + bx$

**Problemes**

- 5.1 Trobeu la recta  $y = mx + n$  que millor ajusta el conjunt de punts:

$x$	2,31	4,11	6,35	8,82	10,1	12,6
$y$	7,35	8,81	10,4	12,3	13,5	14,7

Representeu gràficament el punts i la recta d'ajust.

- 5.2 Un pèndol de torsió respon a les perturbacions angulars aplicades d'acord amb l'expressió:

$$\tau = -\kappa\theta$$

on  $\tau$  és el moment restaurador,  $\kappa$  la constant elàstica i  $\theta$  l'angle de gir. S'han fet els següents mesuratsges

$\tau$ (Nm)	29,4	59,3	88,6	118,4
$\theta$ (°)	2	4	6	8

- a) Determineu el valor de  $\kappa$  (en Nm/rad) amb 3 xifres significatives.  
 b) Feu la representació gràfica de les dades i la recta d'ajust.
- 5.3 Sabem que existeix una relació teòrica entre dues magnituds  $x$  i  $y$ ,

$$y = \ln(\alpha + \beta x)$$

on  $\alpha$  i  $\beta$  són dos paràmetres constants desconeguts. Estimeu el seu valor fent un ajust per mínims quadrats de les mesures de  $x$  i  $y$  (obtingudes amb un experiment) que apareixen en la taula.

$x$	1	2	3
$y$	2,67	3,16	3,54

Feu la representació gràfica de les dades.

5.4 S'han efectuat unes mesures experimentals, amb els resultats de la taula.

x	10	20	30	40
y	11,4	13,3	14,1	15,2

Les dades compleixen la llei

$$y = \alpha + \beta x^{1/3}$$

Trobeu el valor dels paràmetres  $\alpha$  i  $\beta$  (amb 2 xifres significatives), mitjançant un ajust de mínims quadrats.

5.5 S'ha mesurat la intensitat del corrent elèctric i la diferència de potencial en els extrems d'una resistència, i s'ha obtingut la taula següent.

$I (\pm 0,1 \text{ mA})$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\Delta V (\pm 0,5 \text{ mV})$	0,0	33,1	66,3	99,5	133,1	165,8	200,0

Segons la llei d'Ohm ( $\Delta V = R I$ ) aquestes dades s'han d'ajustar a una recta, el pendent de la qual ens donarà el valor de la resistència. Representa gràficament els punts, i sense necessitat de fer l'ajust  $y = mx + n$ , digues quina de les següents solucions pot ser la correcta i per què.

	a)	b)	c)	d)
$m$	333 W	45 W	333 W	333 W
$n$	7,14 mV	- 0,19 mV	- 0,19 mV	- 0,19 mV
$r$	0,9999	0,9999	0,9999	0,3142

# Mètodes d'aproximació de dades

## 6.1 Interpolació

Moltes magnituds físico-químiques venen tabulades en funció d'una variable independent (com per exemple la densitat en funció de la temperatura en la Taula 6.1), en la forma  $y(x)$  per a determinats valors  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Quan es vol conèixer la quantitat  $y$  per a un valor de  $x$  no tabulat (sense haver de mesurar novament), una solució ràpida i efectiva ve donada pel mètode de la interpolació, que consisteix a representar la funció  $y(x)$  en l'interval entre dos punts coneguts per mitjà d'una recta, o en l'interval entre tres punts per mitjà d'una paràbola, etc.

**Taula 6.1** Tensió superficial de l'aigua en funció de la temperatura.

$T_i$ (C)	$\sigma$ (din cm <sup>-1</sup> )
0	75,7
10	74,2
20	72,5
30	71,2

En general, donats  $n$  punts coordenats hi ha un únic polinomi de grau  $n$  que passa per tots ells, el qual podem utilitzar com a polinomi d'interpolació. Amb tot i això, sol resultar més convenient escollir un interval limitat de valors tabulats i efectuar una interpolació a un polinomi d'ordre baix. Nosaltres veurem només la interpolació lineal, per mitjà d'una recta.

Disposem, doncs, de dos valors tabulats en la forma

$x$	$y$
$x_0$	$y_0$
$x_1$	$y_1$

i s'ha de determinar l'equació de la recta que passa per aquests punts, que podem escriure com

$$y = p(x - x_0) + y_0, \quad (6.1)$$



on  $p$  és el pendent, que val

$$p = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad (6.2)$$

i per tant

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (6.3)$$

Aquesta equació permet determinar qualsevol valor de la magnitud  $y$  en l'interval considerat, amb un error donat per

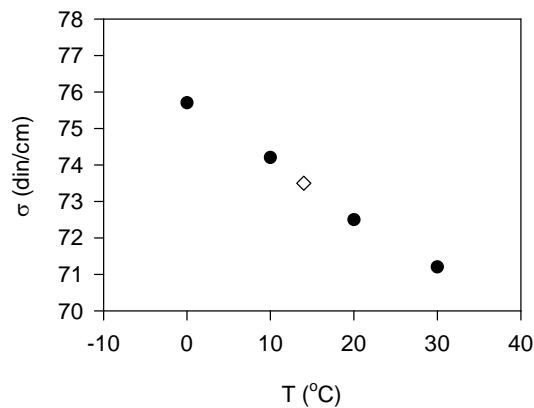
$$\varepsilon_y = \left| \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right| \varepsilon_x. \quad (6.4)$$

### Exemple 6.1

Volem determinar el valor de la tensió superficial de l'aigua  $\sigma$  a una temperatura de  $14^\circ\text{C}$ , a partir de les dades de la Taula 6.1.

Abans d'efectuar una interpolació hem de decidir quina és la funció més apropiada, observant la tendència general de les dades. En la representació gràfica de les dades de la Taula 6.1 (Fig. 6.1, cercles plens) s'observa que una recta serà una bona aproximació.

**Fig. 6.1** Exemple 6.1. Tensió superficial de l'aigua en funció de la temperatura. Els cercles plens són les dades de la Taula 6.1, i el romb és el resultat de la interpolació lineal.



Una vegada hàgem comprovat que les dades segueixen aproximadament una recta, triem dels valors tabulats els dos adjacents a la temperatura de  $14^\circ\text{C}$ , i escrivim l'expressió de la recta d'interpolació

$$\sigma(T) = 74,2 \text{ din cm}^{-1} + \frac{(72,5 - 74,2) \text{ din cm}^{-1}}{(20 - 10)^\circ\text{C}}(T - 10)^\circ\text{C}.$$

D'aquí s'obté (si suposem que  $\varepsilon_T = 1^\circ\text{C}$ )

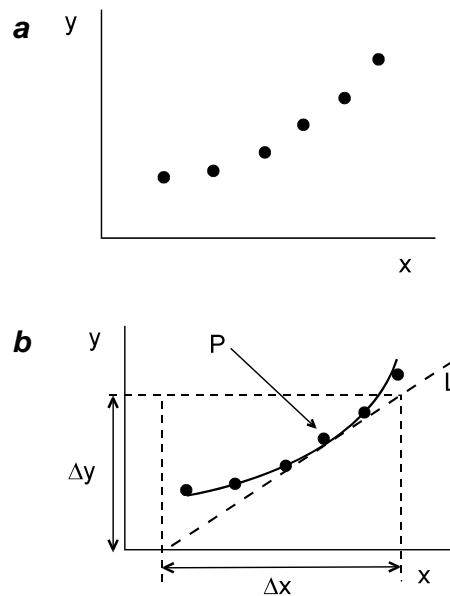
$$\sigma(14^{\circ} \text{C}) = (73,52 \pm 0,17) \text{ din cm}^{-1}$$

Aquest punt es representa com un romb en la Fig. 6.1.

## 6.2 Determinació de la derivada

De vegades s'ha de determinar la derivada d'una corba experimental en un punt concret. Com que la forma funcional de la funció és desconeguda — només disposem dels punts experimentals —, no és possible utilitzar els mètodes analítics de derivació. Ara bé, ja que la derivada d'una funció en un punt coincideix amb el pendent de la tangent a la corba en aqueix punt, es pot calcular la derivada gràficament.

**Fig. 6.2** (a) Representació d'un conjunt de punts experimentals; (b) determinació gràfica de la derivada de la corba en el punt  $P$ , com el pendent de la recta tangent  $L$ .



El procediment comença traçant una línia recta  $L$  tangent a la gràfica pel punt  $P$  en què es vol calcular la derivada (Fig. 6.2). Aleshores es tracta de determinar el pendent de la recta  $L$ , per a la qual cosa s'ha de fixar un cert interval  $\Delta x$  i el corresponent interval  $\Delta y$ , per exemple, prolongant la recta  $L$  fins que talle l'abscissa, com en la Fig. 6.2.b. La derivada de la corba en el punt  $P$  vindrà donada pel següent quocient incremental:

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=x_p} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (6.5)$$

Val a dir que la qualitat del resultat ve molt influïda pel traçat de la corba

experimental, la qual prenem com a referència per al traçat de la recta  $L$ . En qualsevol cas, el mètode que acabem d'exposar és només aproximat. Per a obtenir una determinació més exacta, s'haurà d'ajustar numèricament els punts experimentals a una funció apropiada, mitjançant un procediment de mínims quadrats. Com que el resultat de l'ajust és una funció, generalment un polinomi, es pot obtenir la derivada en qualsevol punt per mètodes analítics.

Si hem de calcular punt a punt la derivada en un gràfic que conté un gran nombre de punts, podem seguir un mètode més ràpid, però molt més inexacte, que el que hem indicat prèviament. Consisteix a determinar el pendent de la recta que uneix cada parell de punts,  $x_i$  i  $x_{i+1}$ , per mitjà de l'expressió següent:

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=x_i} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (6.6)$$

# Documentació i comunicació del experiments

---

## 7.1 Elaboració de memòries i publicacions

En la majoria d'ocasions els resultats del treball experimental s'hauran de comunicar a una comunitat que no té accés directe al procés d'experimentació, i que està integrada per professionals amb formacions diverses i diferents motius d'interès pels resultats. Els criteris generals de comunicació científica tracten de garantir un màxim d'intel·ligibilitat, objectivitat i eficiència en l'intercanvi i acumulació d'informació i coneixements.

Distingirem aquí dues etapes en la documentació-comunicació dels experiments. En primer lloc, la presa de *notes experimentals* que enregistren l'experiment. En segon lloc, la *memòria* amb la qual l'equip de treball elabora un informe de l'experiment, o una publicació en l'àmbit dels especialistes.

### A *Notes experimentals*

El propòsit primordial de les notes és la preservació de les dades i de les observacions que formen part de qualsevol investigació científica. Durant l'experiment convé centrar-se a consignar la informació de la manera més completa possible i deixar per a més tard la interpretació, ja que en un altre moment serà irrecuperable la visió de la situació amb tots els seus detalls que gaudim en plena experimentació.

Les notes han de ser clares, concises i, sobretot, completes: s'hi consigna tota aquella informació necessària per a comprendre i interpretar posteriorment les dades, tant pel que fa a les accions realitzades, com al resultat de les mesures. El principi rector de la presa de notes és escriure amb prou detall i claredat com perquè un altre científic pugui repetir el treball i, basant-se en les descripcions escrites, obtenir-ne el mateixos resultats. Seguint aquesta indicació aconseguirem entendre'n perfectament el contingut quan hàgem de recórrer a les nostres notes un temps després.

Les notes han d'estar datades, i les pàgines numerades consecutivament.

L'ordre en què es troba escrita la informació correspon a la seqüència temporal de les accions realitzades, per la qual cosa resulta recomanable utilitzar un quadern enlloc de fulls solts. El paper quadriculat facilita la ubicació de taules de dades i esquemes.

Un quadern de laboratori serveix de base per a atribuir la prioritat d'un descobriment o una patent, si s'elabora d'acord amb una sèrie de requisits formals (Kanare, 1985). Llevat d'aquests casos excepcionals, les notes experimentals pertanyen al domini restringit de l'equip experimental.

Una memòria o publicació, en canvi, surt a una comunitat anònima: una classe professional o la institució científica en un sentit ampli, i d'acord amb això els requisits de la seua elaboració són ben diferents. En els següents paràgrafs veurem les característiques bàsiques de les publicacions científiques i tecnològiques. Aquestes indicacions també poden resultar d'utilitat si el que heu de realitzar és la memòria d'una pràctica en el context del laboratori docent.

### *B El report experimental*

Les tasques de recerca donen lloc a nous resultats i interpretacions que són publicats per a donar-los difusió i així incorporar-los al corpus de coneixement compartit. Aquesta és una etapa clau per al desenvolupament del camp científic concret, per tal com un camp en què no es publiquen noves troballes va quedant paulatinament relegat a l'oblit; hom diu aleshores que no hi ha «interés» per aquesta mena d'estudis. Així mateix, habitualment la publicació de resultats és essencial per als científics mateixos, tal i com assugereix el lema clàssic «*publish or perish*». Les publicacions nodreixen el desenvolupament professional d'un científic.

La comunicació de resultats científics es du a terme, principalment, per mitjà de treballs («*papers*») en una de les publicacions periòdiques especialitzades, encara que hi ha d'altres canals: llibres, monografies, congressos... Existeix una gran varietat de revistes, i comunament toquen camps bastant restringits; en total en són milers i el nombre creix contínuament\* (també hi ha un nombre reduït de revistes molt genèriques: *Nature*, *Science*...) La majoria de treballs que es publiquen queden colgats en el volum monstruós de bibliografia disponible i ja no se'n sent a parlar més. En l'extrem opost, una petita part dels treballs publicats es converteixen en contribucions determinants, com ara generant un criteri experimental de

---

\* El *Journal Citation Reports* de l'any 1994 llista 4514 publicacions periòdiques científiques i tecnològiques, amb un total de 11341030 articles publicats.

verificació, o una nova aplicació tecnològica, o una interpretació que siga àmpliament adoptada. En general, la importància d'un treball es mesura segons la seua influència en els esdeveniments posteriors, i l'escala de valors rep el nom d'«impacte». L'ambició de produir treballs amb gran impacte és la força motriu de molts investigadors i investigadores.

Tot i la diversitat de temes i de publicacions, i els milions d'autors que hi contribueixen, els textos científics mantenen un característic «aire de família» que, a més de la tradició i la funcionalitat, respon a la naturalesa peculiar del que entenem per experimentació científica (la qual cosa hem tractat amb detall en la Introducció). En la majoria de circumstàncies l'experimentació és una búsqueda del general a partir del particular. Prenem un espècimen concret disponible en el nostre laboratori com a representatiu d'una classe, amb l'objectiu de comprendre les propietats genèriques d'un sistema o tipus de sistemes. Concurrentment, tot experiment té una dimensió valorativa, tractem d'inferir més coses de les que estrictament tenim davant els ulls. Aquesta és la part que requereix un saber, una capacitat d'interpretació que s'ha de manifestar perfectament en el text.

Per tant, un text científic va més enllà d'una relació o llistat de manipulacions efectuades en el laboratori. La finalitat de l'activitat experimental no es limita a traçar una sèrie de gràfics, donar valors de magnituds; el que cerquem són característiques genèriques, connexions entre fenòmens on abans no n'hi havia, recurrències estables. Els experimentadors tenen un gran marge d'acció per a modificar el sistema, creuar informacions, dissenyar tests, comprovar que les troballes són reproduïbles, eliminar errors i incerteses; en una paraula, investigar, amb la finalitat d'*establir* un seguit de determinacions. Les tasques pràctiques es conjuguen amb un procés de reflexió i elaboració en què ordenem els resultats de les diverses proves efectuades, les idees i les interpretacions fins a arribar a una visió global coherent. Així prenem una sèrie de decisions sobre la significació general de la base empírica i les conseqüències dels assajos efectuats. Reunim una *base factual* que consisteix en les dades i observacions, però que també conté les altres vessants que els donen sentit: hipòtesis acceptables, interpretacions, arguments, deduccions matemàtiques, conjectures i explicacions plausibles.

Quan l'experimentador ha fet un ús judiciós de les seues prerrogatives i ha arredonit els resultats, es troba qualificat per a actuar com a autor o autora en l'etapa crucial de publicació. (Michael Faraday va definir el procés d'experimentació com *work, finish, publish*.) Aleshores s'ha de prendre la matèria primera de la base factual i compondre un report on es manifesten sense ambigüitats les nostres determinacions.

Notem que el text circularà autònomament, ara i en l'avenir, entre d'altres

especialistes i professionals que el prendran en consideració per als seus propis desenvolupaments. Per tant hem d'elaborar un informe exhaustiu, i rellevant en el context indicat. Ens haurem de cènyer a la base factual (ignorem qualsevol altra mena de consideracions) i anar al gra, evitant prolixitat innecessària i expressions de significat fosc; i es redactarà de bona fe, sense distorsionar l'evidència, procurant que el digam siga cert.

A l'hora d'articular els fets i idees en el text disposem de dos mecanismes bàsics. El més obvi és l'estructura formal segons la qual adaptem l'escrit a un esquema de parts —més o menys convencional— que compleixen funcions establertes. A més a més, disposem dels recursos normals del llenguatge escrit per a configurar una estructura discursiva. Vegem primer aquest segon aspecte.

Qualsevol text és una unitat distinta d'altres (per definició), i a més, a banda del títol i altres detalls, té una continuïtat i una disposició que idealment correspon a la seqüència de lectura. Els mecanismes lingüístics ens permeten anticipar, comparar, i establir connexions entre idees; o distingir una afirmació central d'un comentari puntual. Així és com la manera d'escriure configura l'estructura del discurs consistent en una distribució d'idees amb interrelacions i subordinacions. Generalment volem que el lector capte ràpidament el més important i pare menys atenció a l'accessori. Per això, l'estructura discursiva s'ha de correspondre en certa manera a la visió global de l'experiment que hem aconseguit segons vam dir més amunt. Simplificant, podem dir que la memòria tindrà un eix organitzador consistent en un o més temes principals al voltant dels quals es despleguen aspectes subordinats.

Evitem en qualsevol cas el defecte greu de la carència d'estructura discursiva, o el que és el mateix, la presentació de fragments disconnexos que no es supediten amb claredat a un pla intencional. Serà dubtós quin crèdit hem de donar al que hi ha escrit si fa la sensació que els autors no acabaven de saber què duïen entre mans.

Posem per cas el típic experiment en què s'estudia una relació entre diversos paràmetres, segons un model determinat. El *propòsit central de la investigació* és prendre una determinació sobre la validesa de la relació. Supposem que hem conclòs que la relació funciona correctament, per aplicació de tècniques experimentals independents. Aleshores el *propòsit central del report* és afirmar la validesa de la relació, segons es justifica de l'evidència. L'exposició d'aquest tema principal constitueix l'eix organitzador del discurs en la memòria. Els temes subordinats són aquells estudis o accions que han estat empresos per a establir la validesa de la relació principal.

Podem veure doncs que l'estructura discursiva d'una memòria experimental difereix considerablement de la que solen tenir les notes experimentals. Com que aquestes consisteixen en una relació de tot allò que ha ocorregut durant l'experiment, la seua estructura discursiva és la d'una història o una narració, on una seqüència temporal subjacent estableix el lligam entre les frases: «He pesat aquesta peça i dóna tant... Ara mesure la seua alçària...» En canvi, el discurs de la memòria s'assembla més a la defensa d'un argument, on la matriu bàsica de la composició és una idea.

A banda de l'estructura discursiva, que aconseguim amb l'estil o manera d'escriure, hem d'atendre l'estructura formal del document. Els detalls d'edició i presentació varien considerablement segons les circumstàncies; en cada cas ens en assabentarem dels requisits concrets. Un tipus d'estructura que s'utilitza molt comunament consta de les següents parts:

- Títol i autors.
- Resum.
- Introducció.
- Secció experimental.
- Resultats.
- Discussió.
- Conclusions.
- Bibliografia.

En primer lloc es sol col·locar el *títol* que identifica el treball: ha de ser breu i contenir les paraules clau que identifiquen el tema. A sota del títol es posarà el nom de la persona (o persones) que han elaborat el treball. És útil incloure, a continuació del títol, un resum que deixi clar l'objectiu principal del treball i done els resultats finals així com les conclusions més importants.

Habitualment comencem el text amb una *introducció* on s'exposa el propòsit de l'experimentació, els antecedents del tema, i altres consideracions de caràcter general. La introducció juga un paper important en l'articulació del text, ja que posa el lector en situació i li permet formar-se una expectativa sobre el contingut de la resta.

En acabant venen diverses seccions que conformen el cos principal de la memòria. Aquí tenim l'opció d'efectuar el repartiment més convenient segons el tipus de material que comuniquem, encara que la majoria de treballs experimentals s'adapten a la divisió en tres seccions dites més amunt (amb possibles divisions addicionals en subseccions). La *Secció experimental* conté un informe de les tècniques de mesura utilitzades, que permet a un altre professional entendre i, si calia, reproduir el nostre experiment. (Evitem extendre'ns sobre llocs comuns i detalls ben coneguts



per tothom.) Observem que la finalitat de la *Secció experimental* és dir com hem procedit, no quins resultats hem obtingut; això es deixa per a la secció de *Resultats*, en la qual reportem les mesures i comentem les seues característiques principals. També dins els *Resultats* podem explicar breument els models teòrics i mostrar els ajusts de les dades. Finalment, en la secció de *Discussió* s'efectua la interpretació dels resultats experimentals i es comenta la seua significació general. Observem que és en la *Discussió* on posem en joc la dimensió valorativa comentada més amunt; aquesta secció és l'ànima del treball. Moltes voltes el treball comporta diferents tipus de resultats i preferirem exposar-ne la interpretació immediatament després de presentar-los; aleshores es presenta una única secció de *Resultats i Discussió*.

Generalment es remata el text amb una secció de *Conclusions* que conté una breu síntesi de la investigació i les determinacions principals.

Si al llarg del text hem citat referències —com a antecedents de la investigació, o per a invocar una certa teoria, o per a legitimar alguna argumentació, entre d'altres possibilitats— aleshores farem una relació bibliogràfica al final de tot.

Posem ara per cas un estudi complex que consisteix en la caracterització de les propietats físiques d'un nou compost polimèric; mostrarem a continuació una manera d'adaptar la publicació dels resultats a l'estructura formal precedent. En la *Introducció* es comentaran les possibles aplicacions del material, les propietats d'altres compostos d'estructura semblant, i aquelles propietats concretes (estructurals, mecàniques, tèrmiques, elèctriques...) que hem cobert en l'estudi. La *Secció experimental* exposa el conjunt de tècniques experimentals utilitzades, amb detall de les característiques de les mostres i les condicions de realització de les mesures. Una única secció de *Resultats i Discussió* es separa en subseccions corresponents a les diverses propietats investigades. En cada subsecció es mostren els resultats experimentals, es discuteixen breument els possibles models explicatius, es comparen els models amb les dades, es determinen paràmetres... En general aquesta seria una publicació descriptiva en la qual es tractava de delinear els grans trets de les característiques i comportament del nou material. A més hauríem de relacionar els resultats amb l'estat de coneixements del tema, de manera que l'estudi quedés integrat amb d'altres semblants. Si la recerca ha revelat algun aspecte radicalment nou, hi farem èmfasi oportunament: «És la primera volta que s'observa aquest efecte, segons el nostre coneixement.»

En un text científic es mobilitza una varietat de recursos comunicatius no-lingüístics d'acord amb les necessitats específiques del camp d'estudi: fórmules, gràfics, esquemes, taules de dades... La millor manera de fer-se

una idea sobre les maneres convencionals d'integrar aquests recursos en el text és consultar qualsevol revista científica especialitzada en la biblioteca. En altres parts d'aquest llibre hem donat indicacions respecte d'escriptura de quantitats físiques, realització de gràfics, etc., les quals hem de complir estrictament quan realitzem una memòria o publicació. En les següents seccions analitzarem més en detall la forma de presentar les taules i gràfics. Fem ara uns petits comentaris i recomanacions sobre les fórmules i els diagrames. Com es pot veure en qualsevol publicació científica, les fórmules es solen escriure separades del text (però puntuades) i amb numeració consecutiva. L'ús de diagrames és molt recomanable perquè permeten visualitzar esquemàticament un disseny experimental (per exemple) i entendre'l millor que qualsevol explicació escrita per molt detallada que siga. Aquests diagrames, igual que els gràfics van acompanyats d'un «peu de figura» en el qual s'inclou la numeració corresponent i les explicacions necessàries per a entendre'ls.

Notem finalment que de la *Introducció* a les *Conclusions* (ambdues incloses) el text té continuïtat, i les figures, esquemes i taules s'insereixen prop del lloc on són citats per primera volta. Però si resulta més convenient presentar cada figura en un full apart, s'adjunten totes al final.

## 7.2 Taules

Les dades experimentals que resulten de la variació controlada d'algun paràmetre s'apunten i es presenten en forma de *taules*. Una taula és la presentació de les mesures de forma ordenada, on és fàcil trobar-hi la informació. En treballs científics s'acostumen a seguir els criteris següents a l'hora de confeccionar les taules:

- 1) Una taula va encapçalada per un títol. S'ha de procurar que la taula siga autoexplicativa, és a dir, que no s'haja de llegir el text per a entendre-la.
- 2) A la primera línia de cada columna s'indica la magnitud amb el seu símbol (o nom complet) acompanyada de les unitats.
- 3) Les dades es presenten acompanyades del seu error absolut. Cal parar atenció a les xifres significatives.
- 4) La variable independent es posa a la columna més a l'esquerra de la taula.

**Fig. 7.1** Presentació de dades en taules. Cada mesura s'acompanya del seu error. En la Taula 1 s'utilitza l'error estàndard, i en la Taula 2 es dona l'error com  $1\sigma$ , segons s'especifica en les respectives capsaleres. (D'articles publicats en *Science*.)

**Table 1.** Antagonism of release of TNF- $\alpha$  induced by LPSs from different species of bacteria. Antagonism of LPS-induced release of TNF- $\alpha$  by E5531 was evaluated in adherent human monocytes-macrophages ( $1 \times 10^6$  to  $2 \times 10^6$  per well) in the presence of 1% human serum in RPMI 1640 medium. Addition of E5531 was followed immediately by 10 ng/ml of the indicated LPS. After 3 hours of incubation, media were centrifuged and the resulting supernatants were assayed for TNF- $\alpha$  by an enzyme-linked immunosorbent assay (ELISA). Values given are the average  $\pm$  SE for three assays, each assay being measured in triplicate.

Source of LPS	TNF- $\alpha$ released (pg/ml)	Antagonism by E5531 ( $IC_{50}$ in nM)
<i>Escherichia coli</i>	657 $\pm$ 144	1.22 $\pm$ 0.66
<i>Klebsiella pneumoniae</i>	615 $\pm$ 185	1.82 $\pm$ 0.79
<i>Pseudomonas aeruginosa</i>	475 $\pm$ 119	2.73 $\pm$ 1.79
<i>Salmonella minnesota</i>	898 $\pm$ 141	0.14 $\pm$ 0.06

**Table 2.** Inversion for rupture properties. Four subevents identified in waveforms for which rupture properties were determined (see text).  $X$  and  $\phi$  are the distance and azimuth (clockwise from north) referenced to onset  $E_0$ ,  $\tau$  is origin time of subevent and  $V$  is apparent rupture velocity  $X/\tau$ . Rupture plane assumed to be near-horizontal nodal plane (15). Uncertainties are  $1\sigma$ .  $N$  is number of observations.

Event	$X$ (km)	$\phi$ (deg)	$\tau$ (s)	$V$ (km s $^{-1}$ )	$N$
$E_1$	29 $\pm$ 3	90 $\pm$ 5	11.1	2.6 $\pm$ 0.2	26
$E_3$	34 $\pm$ 3	35 $\pm$ 5	28.0	1.2 $\pm$ 0.2	25
$E_{4a}$	35 $\pm$ 7	30 $\pm$ 13	35.1	1.0 $\pm$ 0.2	25
$E_{4b}$	52 $\pm$ 9	15 $\pm$ 10	36.8	1.4 $\pm$ 0.3	25

Quan treballem en el laboratori prendrem les dades experimentals directament en taules, com a part de les notes experimentals.

### 7.3 Gràfics

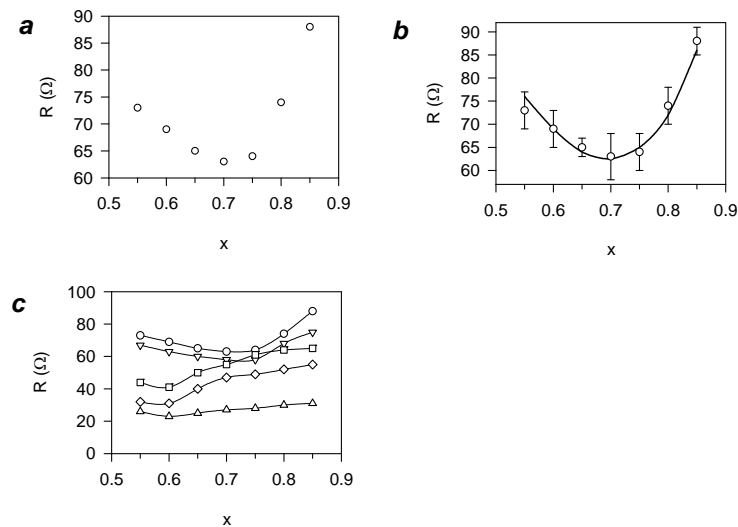
La representació de dades experimentals en forma de gràfic és una poderosa eina de l'activitat experimental. El gràfic permet apreciar de forma instantània les relacions que les dades sostenen entre si i, per tant, és fàcil comprovar-hi si segueixen una tendència ben definida o, per contra, si estan molt disperses; si s'ajusten al comportament esperat sobre la base de la teoria, o si algun punt es desvia d'aqueix comportament sense raó aparent. Aquests, i molts altres, constitueixen els tipus d'anàlisi que es duen a terme amb gràfics, i amb els quals es prenen decisions sobre la qualitat, significació i conseqüències dels experiments i mesuratsges.

Per aquests motius és essencial representar correctament les dades a fi que el gràfic transmeta fidelment la informació experimental i en facilite la interpretació i la discussió. Amb aquesta finalitat existeixen una sèrie de convencions de representació que exposarem més avall. Tanmateix, convé aclarir que gaudim d'una certa flexibilitat pel que fa als sistemes de representació, de tal manera que aquests s'acobllaran a la naturalesa de les mesures i la interpretació que se'n faça. Tot i això, sempre es respectaran els principis generals de claredat, precisió i eficiència, i el requeriment fonamental de no distorsionar allò que les dades diuen per si mateixes.

Vegem les indicacions que s'han de seguir en relació amb els diversos aspectes del gràfic: els eixos, els punts experimentals, la corba contínua, i el peu de figura explicatiu. Aquestes indicacions s'il·lustren amb els gràfics que es mostren a la Fig. 7.2. Així mateix a les Figs. 7.4-7.7 es reproduïxen diversos gràfics de la revista *Science* on es pot apreciar com es fa ús de les convencions en publicacions científiques.

Per contra, els gràfics de la Fig. 7.3 comporten una realització inconvenient que hauria de ser corregida.

**Fig. 7.2** (a) Resistència d'una mostra de  $\text{Li}_x\text{WO}_3$  en funció de la concentració relativa  $x$  de Li quan s'hi aplica un voltatge de 1,0 V. (b) Per a les dades de (a) es representa amb barres l'error de cada valor de resistència, i la línia correspon al model teòric. (c) Per al mateix sistema que (a), es mostren resultats de mesures a diversos voltatges aplicats: (○) 1,0 V; (◊) 1,5 V; (□) 2 V; (△) 2,5 V; (◇) 3 V.



#### A Els eixos

- 1) S'indicarà clarament en cada eix la magnitud que s'hi representa i la unitat utilitzada.
- 2) Es marcaran en els eixos les divisions principals, regularment espaiades, indicant en cadascuna el valor al qual correspon. D'aquestes divisions en farem un nombre raonable; bastants perquè es pugui recuperar el valor numèric dels punts representats, però no tantes que omplim l'eix i els valors de les divisions caiguen uns damunt dels altres. També es poden incloure divisions menors —que no porten numeració— com a fracció de les principals.
- 3) No es marquen divisions en el valor de les mesures obtingudes. Si s'ha de donar amb precisió el resultat mesurat, ho podem fer apart en una taula.
- 4) Quan els valors experimentals abasten uns quants ordres de magnitud,

utilitzarem una escala logarítmica en l'eix que pertoca, v. Fig. 7.4.a i 7.5.a. Si gastem el logaritme en base 10, les divisions principals seran potències de 10, i l'interval entre dues divisions correspon a una *dècada*.

- 5) Les escales s'escolliran de manera que els punts experimentals ocupen el màxim d'espai dins la gràfica, sense deixar zones buides ni concentrar els punts.
- 6) En relació amb el punt anterior, no es menester començar les escales en el valor 0 de la magnitud indicada, com s'ha fet en la Fig. 7.3.a, en la qual l'espai disponible està mal aprofitat.

### B Els punts experimentals

La representació dels punts experimentals ha de ser ben visible i ha d'evitar tota ambigüitat, ja que el resultat efectiu de les mesures és la principal informació continguda en un gràfic experimental. Així per exemple es pot presentar un cercle clarament apreciable per cada punt experimental, com en la Fig. 7.2.a. Altrament, un punt massa estret en dificulta la localització, Fig. 7.3.b.

Tanmateix, quan la mesura forneix un gran nombre de dades sotmeses a considerable fluctuació, serà més fàcil la percepció del seu comportament si presentem una línia que uneix cada parell consecutiu de dades per mitjà de traços rectes, sense necessitat de representar cada punt. Aquest sistema es va fer servir en les figures de la Secció 2.1, i també és el que s'ha utilitzat en la Fig. 7.5.b.

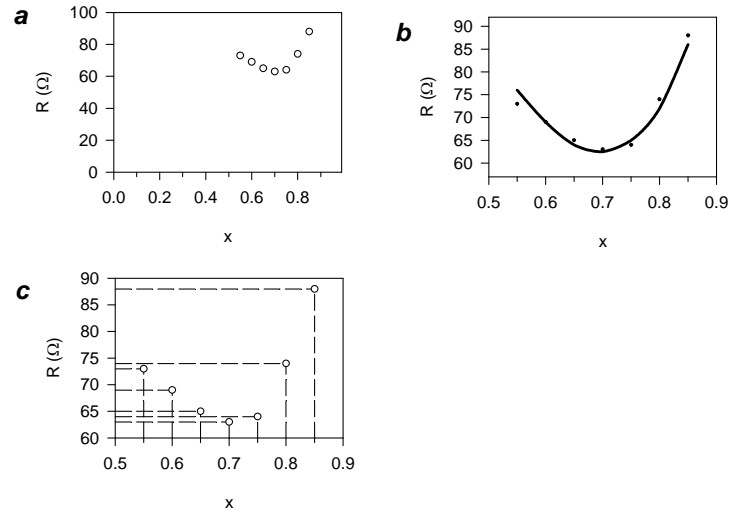
Sovint variem les condicions de realització d'un mesuratge, i la presentació dels diversos resultats en un sol gràfic en facilitarà la comparació. Aleshores es representarà cada mesura amb un símbol diferent, i el seu significat s'aclarirà apart, Fig. 7.2.c.

També tenim l'opció de representar l'error que afecta cada punt experimental, per mitjà de *barres d'error*, com es veu en la Fig. 7.2.b. Òbviament, la barra d'error per a la variable  $y$  tindrà una extensió  $2\epsilon_y$ . Així és com s'han representat els punts

$$\{x = 0,65, R = 65 \pm 3 \Omega\}, \{x = 0,70, R = 63 \pm 5 \Omega\}, \dots$$

en la Fig. 7.2.b. Una alternativa al sistema de barres és fer un rectangle d'error, com en la Fig. 7.7.A.

**Fig. 7.3** Aquestes representacions de les mateixes dades de la Fig. 7.2.a presenten inconvenients: (a) S'han triat unes escales massa petites en els dos eixos; (b) Els punts experimentals no s'aprecien bé; (c) Les línies a traços dificulten la lectura de la variació dels punts.



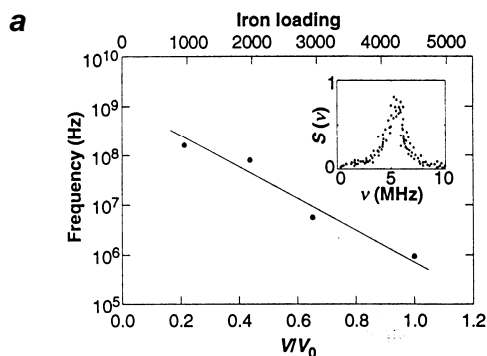
### C La corba contínua

Moltes voltes juntament amb els punts experimentals es presenten una o més línies contínues que poden tenir diferents significats; en veurem alguns casos a continuació.

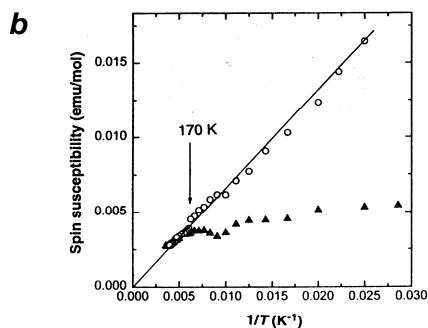
- 1) *Resultat d'un ajust.* Sovint ajustem les dades a una relació funcional determinada, com hem vist al Capítol 6. Aleshores la corba resultant de l'ajust (recta, polinomi, etc.) es presentarà en el gràfic, com en les Figs. 6.1, 7.4.a, 7.7.b i també la línia de traços de la Fig. 7.5.b.
- 2) *Predicció d'un model.* Si es disposa d'un model teòric i de tots els paràmetres escaients, podem fer una predicció de resultats independent de les mesures, que es presenta com una corba contínua, Fig. 7.5.a. La inclusió de barres d'error permet decidir l'acceptabilitat del model, Fig. 7.2.b.
- 3) *Ajut a la visualització.* La línia contínua actua simplement com a guia per alls ulls. Si tenim diversos conjunts de punts en un mateix gràfic, unim cada conjunt amb traços rectes a fi de seguir la seua evolució, Fig. 7.2.c. També es pot traçar una recta que permet extrapolar el comportament de les dades fora de l'interval mesurat, Fig. 7.4.b. Per últim, podem acompanyar els punts d'una corba suau que els ajustarà el millor possible, de forma que passe pel major nombre possible de punts. Però aquest darrer procediment està en desús, ja que la corba s'ha de traçar a mà, i avui els gràfics solen fer-se sencers amb ordinador.

Com les línies poden tenir funcions diverses, procurarem evitar tota possible ambigüitat; si fóra necessari se n'especificarà el significat al peu de figura.

**Fig. 7.4** Presentació de dos gràfics, amb els respectius peus de figura. (a) Es mostra la recta que han de seguir els punts d'acord amb les expectacions teòriques. Noteu la representació logarítmica en l'eix vertical. La inserció (gràfic menut) dóna informació sobre l'obtenció de cadascun dels punts del gràfic principal. (b) Aquí es presenten dues mesures diferents; en una d'elles es posa en relleu el comportament lineal de les dades per mitjà d'una recta contínua, que a més permet extrapolat la tendència dels punts fins a l'origen. (D'articles publicats en *Science*.)



**Fig. 3.** Dependence of resonance frequency,  $\nu_{\text{res}}$ , on particle size,  $V/V_0$ . Note that frequency is plotted on a logarithmic scale in accord with quantum mechanical predictions. The inset shows a typical noise resonance curve  $S(\nu)$  observed for the sample with an Fe loading of 3000 at 24.3 mK in a background field of  $\sim 1$  nT.



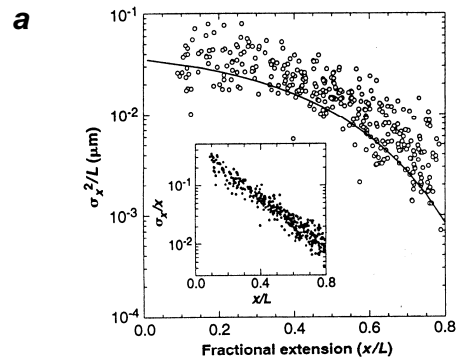
**Fig. 3.** A plot of ESR intensity versus  $1/T$  (measured at 3000 G) shows a Curie-like susceptibility above 170 K for all samples obtained on heating from 4.2 K. Field-oriented samples (open circles) show Curie-like behavior from 4.2 to 300 K, whereas in the absence of orientation by external field, more complicated sample history-dependent behavior is observed for  $T < 170$  K (triangles).

#### D El peu de figura

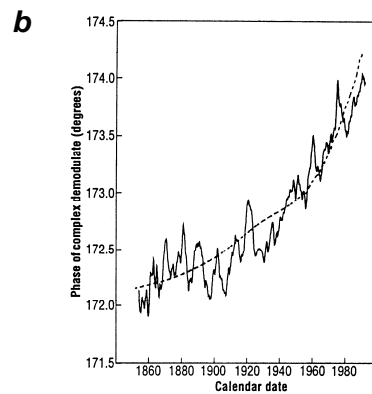
De forma anàloga al que comentàvem per a les taules, els gràfics van acompanyats d'una explicació del que s'està representant, de manera que es pugui entendre el que es representa sense necessitat d'acudir al text: significat

de cada tipus de punt i de les corbes que els acompanyen, condicions de mesuratge, ... En molts casos, aquesta explicació es posa sota el gràfic (peu de figura), on s'inclou la numeració assignada dins del text.

**Fig. 7.5** Presentació de dos gràfics, amb els respectius peus de figura. (a) Representació de la desviació estàndard d'una variable fluctuant. La corba contínua és resultat de l'ajust de les dades a un model matemàtic del procés. (b) En aquesta gràfica es presenta el resultat d'un mesuratge amb la línia que uneix els punts experimentals, sense indicar-los, i la comparació amb un model teòric, representat per la línia de traços. (D'articles publicats en *Science*.)



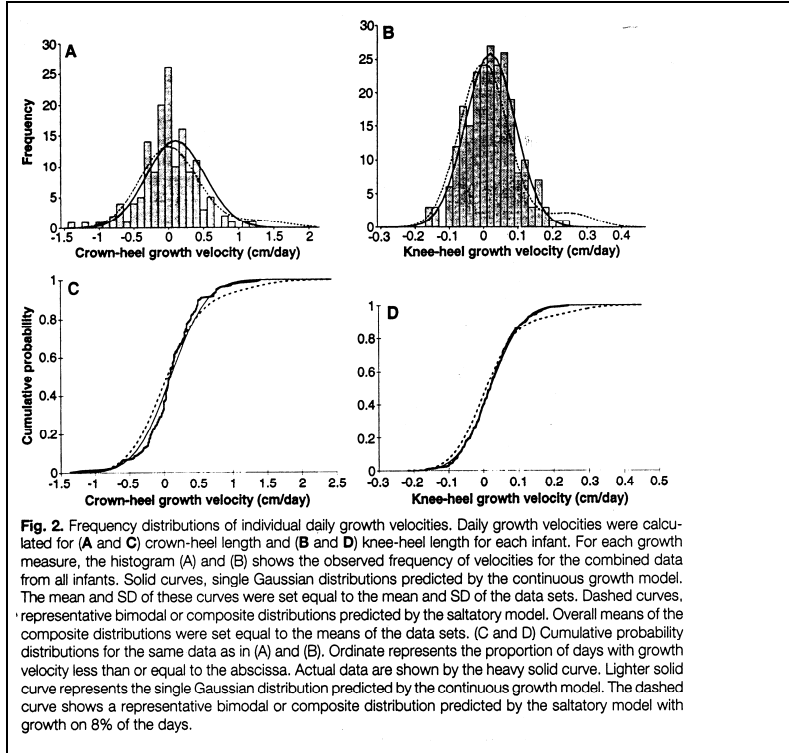
**Fig. 3.** Fluctuations, measured by the standard deviation ( $\sigma_x$ ) about the mean extension, are compared to a dumbbell model prediction of thermally driven fluctuations in the end-to-end distance. Standard deviations corresponding to less than 2 pixels were excluded, which limited the fractional extension to less than 80%. (Inset) Log-linear plot of the relative size of fluctuations in extension versus fractional extension.



**Fig. 12.** Phase of the Jones-Wigley Northern Hemisphere land plus marine temperature series, Fig. 5, after a linear offset  $50^\circ.256$ . ( $t - 1854$ ) from precession has been added. It is thus an estimate of deviation of the phase from the trend in Fig. 5 that was observed in the early part of the record. The dashed line is a least-squares fit to the phase regressed on the logarithm of atmospheric  $\text{CO}_2$  levels and a constant. For a significance test, see Fig. 13.

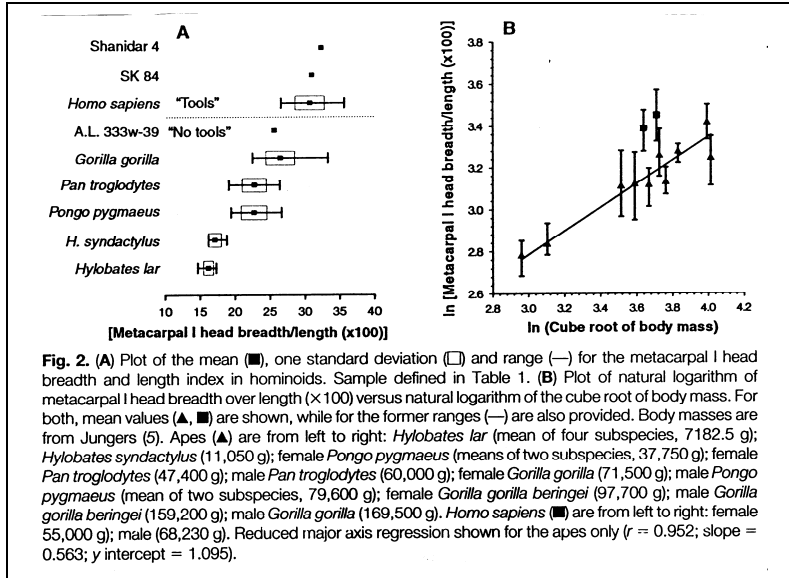


**Fig. 7.6** Presentació de quatre gràfics, amb el seu peu de figura. En A (i semblantment en B) es representa un histograma i el seu ajust a una distribució gaussiana (línia contínua), així com un altre ajust a un model específicament adaptat a les dades considerades (línia de punts). (D'un article publicat en *Science*.)



**Fig. 2.** Frequency distributions of individual daily growth velocities. Daily growth velocities were calculated for (A and C) crown-heel length and (B and D) knee-heel length for each infant. For each growth measure, the histogram (A) and (B) shows the observed frequency of velocities for the combined data from all infants. Solid curves, single Gaussian distributions predicted by the continuous growth model. The mean and SD of these curves were set equal to the mean and SD of the data sets. Dashed curves, representative bimodal or composite distributions predicted by the saltatory model. Overall means of the composite distributions were set equal to the means of the data sets. (C and D) Cumulative probability distributions for the same data as in (A) and (B). Ordinate represents the proportion of days with growth velocity less than or equal to the abscissa. Actual data are shown by the heavy solid curve. Lighter solid curve represents the single Gaussian distribution predicted by the continuous growth model. The dashed curve shows a representative bimodal or composite distribution predicted by the saltatory model with growth on 8% of the days.

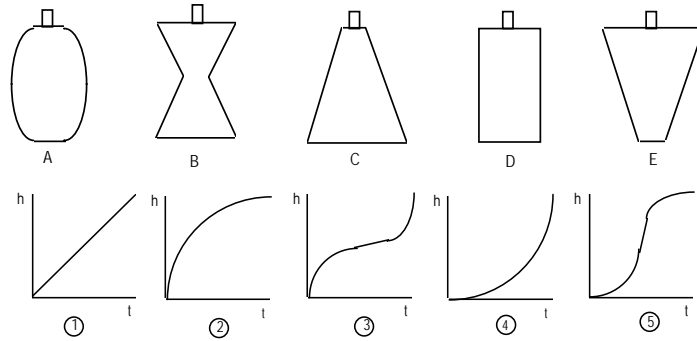
**Fig. 7.7** Presentació de dos gràfics, amb el seu peu de figura. (A) El rectangle negre indica la mitjana de dades disponibles a cada espècie, el rectangle blanc n'indica l'incertesa (una desviació estàndard), mentre que les barres expressen l'interval de dades. (B) La recta és el resultat d'una regressió lineal. Els paràmetres que resulten de la regressió són indicats en el peu de figura, al final del text. (D'un article publicat en *Science*.)



**Fig. 2.** (A) Plot of the mean (■), one standard deviation (□) and range (—) for the metacarpal I head breadth and length index in hominoids. Sample defined in Table 1. (B) Plot of natural logarithm of metacarpal I head breadth over length ( $\times 100$ ) versus natural logarithm of the cube root of body mass. For both, mean values (▲, ■) are shown, while for the former ranges (—) are also provided. Body masses are from Jungers (5). Apes (▲) are from left to right: *Hylobates lar* (mean of four subspecies, 7182.5 g); *Hylobates syndactylus* (11,050 g); female *Pongo pygmaeus* (means of two subspecies, 37,750 g); female *Pan troglodytes* (47,400 g); male *Pan troglodytes* (60,000 g); female *Gorilla gorilla* (71,500 g); male *Pongo pygmaeus* (mean of two subspecies, 79,600 g); female *Gorilla gorilla beringei* (97,700 g); male *Gorilla gorilla beringei* (159,200 g); male *Gorilla gorilla* (169,500 g). *Homo sapiens* (■) are from left to right: female 55,000 g); male (68,230 g). Reduced major axis regression shown for the apes only ( $r = 0.952$ ; slope = 0.563; y intercept = 1.095).

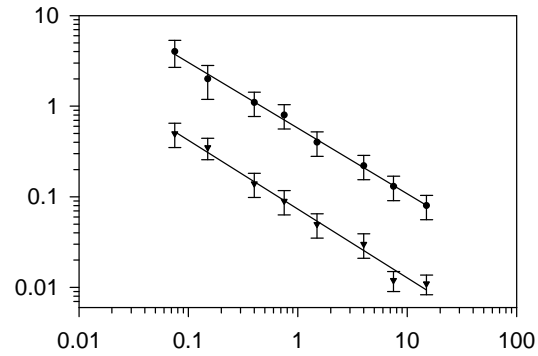
### Problemes

- 7.1 Suposeu que els següents dibuixos corresponen a una secció transversal d'uns recipients de vidre amb el mateix volum. Els anem omplint amb un determinat líquid que cau de la mateixa forma en tots. Evidentment, les seues diferents formes faran que l'alçada que hi assoleix el líquid en cada moment no siga la mateixa, encara que tots es plenen a la vegada. Les gràfiques de sota representen (aproximadament) la funció que relaciona l'alçada del líquid amb el temps.



Identifiqueu cada gràfica amb el recipient corresponent.

- 7.2 a) Completeu tot el que siga necessari perquè la següent representació gràfica pugui ser directament interpretada per ella mateixa.

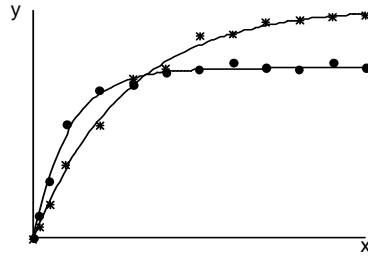


- b) Analitzeu i discutiu els resultats obtinguts tenint en compte que els punts corresponen a dades experimentals i les corbes d'ajust podrien ser les que segueixen:

$$y = 0,61x^{-0,76}$$

$$y = 0,07x^{-0,77}$$

- 7.3 Comenta la següent representació gràfica, completant el que siga necessari (eixos, títols, etc.).



S'ha de tenir en compte que els punts corresponen a dades experimentals i les corbes d'ajust podrien ser les següents

$$y = 150[1 - \exp(-0,1x)],$$

$$y = 200[1 - \exp(-0,04x)].$$

(Assigna alguna magnitud física a  $x$  i  $y$ .)

# Constants físiques i factors de conversió

Els valors d'aquesta taula estan extrets de C. Caso *et al.*, «Review of Particle Physics», *The European Physical Journal C3*, 1 (1998).

Quantitat	Símbol, equació	Valor de càlcul	Valor <sup>a</sup>	Incertesa <sup>b</sup>
velocitat de la llum en el buit	$c$	$3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	2,997 924 58	exacte <sup>c</sup>
càrrega elemental	$e$	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$	1,602 177 33(49)	0,30
constant de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$	6,626 075 5(40)	0,60
constant de Planck reduïda	$\hbar = h/2\pi$	$1,05 \times 10^{-34} \text{ J s}$	1,054 572 66(63)	0,60
permitivitat de l'espai lliure	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$	8,854 187 817...	exacte <sup>d</sup>
permeabilitat de l'espai lliure	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ $= 12,6 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$	12,566 370 614...	exacte
massa de l'electró	$m_e$	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$	9,109 389 7(54)	0,59
massa del protó	$m_p$	$1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	1,672 623 1(10)	0,59
unitat de massa atòmica unificada (u)	(massa àtom $^{12}\text{C}$ )/12 $= (1 \text{ g})/(N_A \text{ mol})$	$1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$	1,660 540 2(10)	0,59
long. d'ona electr. de Compton	$\tilde{\lambda}_e = \hbar/m_e c$	$3,86 \times 10^{-13} \text{ m}$	3,861 593 23(35)	0,089
radi de Bohr ( $m_{nucli} = \infty$ )	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$	$0,529 \times 10^{-10} \text{ m}$	0,529 177 249(24)	0,045
energia de Rydberg	$hcR_\infty = m_e e^4 / 2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2$	13,6 eV	13,605 698 1(40)	0,30
magnetó de Bohr	$\mu_B = eh/2m_e$	$5,79 \times 10^{-11} \text{ MeV T}^{-1}$	5,788 382 63(52)	0,089
magnetó nuclear	$\mu_N = eh/2m_p$	$3,15 \times 10^{-14} \text{ MeV T}^{-1}$	3,152 451 66(28)	0,089
constant d'Avogadre	$N_A$	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	6,022 136 7(36)	0,59
constant de Boltzmann	$k$	$1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ $= 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$	1,380 658(12) 8,617 385(73)	8,5 8,4
volum molar, gas ideal a STP <sup>e</sup>	$N_A k (273,15 \text{ K}) / (101325 \text{ Pa})$	$22,4 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$	22,414 10(19)	8,4
constant de Stefan-Boltzmann	$\sigma = \pi^2 k^4 / 60\hbar^3 c^2$	$5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	5,670 51(19)	34
constant de gravitació	$G$	$6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	6,672 59(85)	128
acc. estàndard grav. nivell mar	$g$	$9,81 \text{ m s}^{-2}$	9,806 65	exacte <sup>f</sup>
$\pi = 3,141 592 653 589 793 238e = 2,718 281 828 459 045 235$				
1 in = 0,0254 m	1 dina = $10^{-5}$ N	1 eV = 1,602 177 33(49) $\times 10^{-19}$ J		
1 Å = $10^{-10}$ m	1 erg = $10^{-7}$ J	$kT$ a 300 K = [38,681 49(33)] <sup>-1</sup> eV		
0° C = 273,15 K	1 G = $10^{-4}$ T	1 atmosfera = 760 torr = 101 325 Pa		

<sup>a</sup> Millor valor (1998), amb la mateixa unitat i potència de deu que el valor de càlcul. La incertesa  $1\sigma$  en les últimes xifres es dona en parèntesi després dels valors.

<sup>b</sup> Parts per milió.

<sup>c</sup> El metre és la longitud del camí recorregut per la llum en el buit en un interval de temps de 1/299 792 458 d'un segon.

<sup>d</sup>  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ .

<sup>e</sup> STP = *standard temperature and pressure* (temperatura i pressió estàndard) = 0° C i 1 atm.

<sup>f</sup> Aquest valor, adoptat el 1901 pel Comitè de Pesos i Mesures, aproxima el valor a latitud 45° a nivell del mar.

# Resum de fórmules i procediments

Espectura de quantitats físiques amb el seu error.

Resultat	$X$	
Error	$E$	
Arredoniment de quantitats		La part truncada en arrodonir una quantitat, la tractem com una fracció. Si la fracció és major o igual que $1/2$ , incrementem la darrera xifra significativa de la quantitat a arrodonir. Si la fracció és menor que $1/2$ , no incrementem.
Arredoniment d'errors	$E \rightarrow \varepsilon_x$	<p>Escrivim els errors:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Amb 2 xifres significatives si la primera és menuda (menor que 3), i</li> <li>• amb 1 xifra significativa si la primera és gran (mantenim 0,29 però arrodonim 0,31 <math>\rightarrow</math> 0,3).</li> </ul>
Arredoniment de resultats	$X \rightarrow x_m$	L'última xifra significativa del valor acceptat i l'última xifra de l'error absolut han d'ocupar la mateixa posició.
Espectura de la quantitat	$x_m \pm \varepsilon_x$	valor acceptat $\pm$ error absolut

Error relatiu

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x_m} . \tag{A2.1}$$

Propagació d'errors en mesures indirectes

$$z = f(x, y, \dots) . \tag{A2.2}$$

$$\varepsilon_z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \varepsilon_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \varepsilon_y + \dots \tag{A2.3}$$

Propagació d'errors aleatoris

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \dots . \tag{A2.4}$$

Descripció d'una mesura múltiple per al cas ideal d'una població infinita.

mitjana	$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum x_i \right)$	(A2.5)
desviació estàndard	$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2 \right]$	(A2.6)
distribució normal	$P_G(x; \mu; \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$	(A2.7)

Descripció d'una mesura múltiple amb  $n$  dades  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

mitjana	$x_m = \frac{1}{n} \sum x_i$	(A2.8)
desviació estàndard	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - x_m)^2}$	(A2.9)
dispersió de la mitjana	$\sigma_\mu = \frac{s}{\sqrt{n}}$	(A2.10)
error estàndard de la mitjana	$\varepsilon(x_m) = \frac{2s}{\sqrt{n}}$	(A2.11)

Ajust d'una recta per mínims quadrats.

recta	$y = ax + b$		(A2.12)
paràmetres	$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$	$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n}$	(A2.13)
errors	$\varepsilon_a = \frac{ a }{\sqrt{n-2}} \tan [\arccos(r)]$	$\varepsilon_b = \varepsilon_a \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2}$	(A2.14)

Interpolació lineal entre dos valors  $(x_0, y_0); (x_1, y_1)$ .

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \text{ amb error } \varepsilon_y = \left| \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right| \varepsilon_x. \quad (\text{A2.15})$$

# Solucions als problemes

2.1 (a)  $17,9 \pm 1,7$ ; (b)  $(5,4 \pm 0,4) \times 10^{-5}$ ; (c)  $9790 \pm 10$ ; (d)  $3,39 \pm 0,12$ ;  
 (b) (e)  $(2,23 \pm 0,05) \times 10^{-5}$ ; (f)  $99,9 \pm 1,0$ ; (g)  $(5,3983 \pm 0,0008) \times 10^6$ .

2.2 (a)  $\varepsilon_{abs} = 5 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_r = 0,42\%$ ; (b)  $\varepsilon_{abs} = 2,1 \times 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_r = 1,8\%$ .

2.3 La primera.

3.1  $y = -10,40 \pm 0,18$ .

3.2  $V = (15,70 \pm 0,25)V$ .

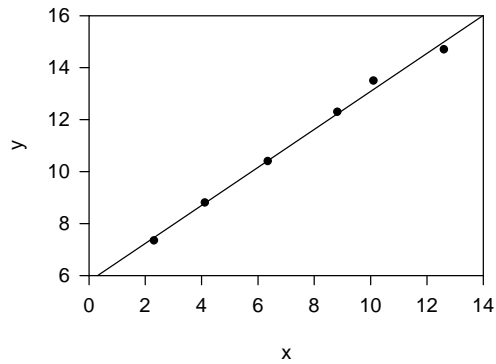
3.3 0,2 %.

3.4  $V = (243 \pm 11) \text{ cm}^3$ .

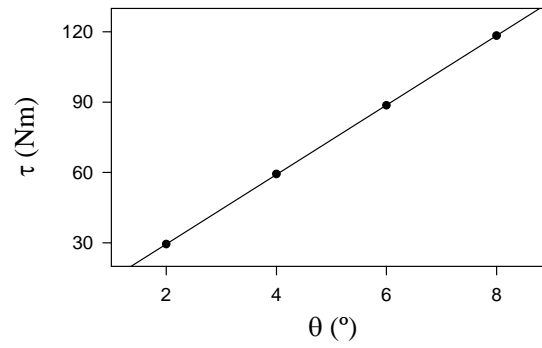
3.5 a)  $\varepsilon_L = 1,4 \text{ cm}$ ; b)  $I = (16,0 \pm 0,6) \text{ J/s}$ .

4.1  $V = 0,91 \text{ V}$  el primer; 2,00 V iguals; i 7,53 V el segon.

5.1  $m = (0,732 \pm 0,027)$ ,  $n = (57,8 \pm 0,22)$ .

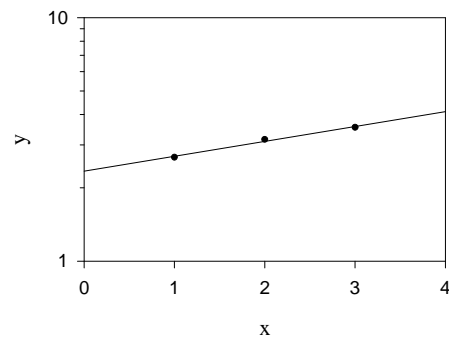


5.2 (a)  $\kappa = 848 \text{ Nm rad}^{-1}$ .

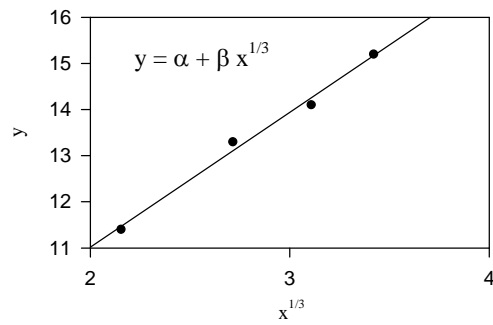


$\alpha = 4,6 \pm 0,8$ ;  $\beta = 9,8 \pm 0,5$ .

5.3

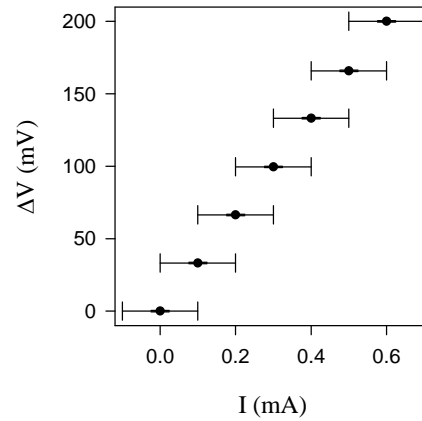


5.4  $\alpha = 5,2$ ,  $\beta = 2,9$ .





5.5 La solució (c).



7.1 1-D, 2-E, 3-A, 4-C, 5-B.

7.2 (a) Títol, nom dels eixos, unitats, identificació de les dues sèries de punts.

(b) Els exponents son quasi iguals, per això van pràcticament paral·leles.

El prefactor de la primera és un ordre de magnitud major que el de la segona, per això les rectes estan separades en aquesta proporció.

7.3 Títol, divisions en els eixos, unitats, identificació de les dues sèries de punts.

---

# Bibliografia

---

- Bevington, P. R., i D. K. Robinson  
*Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, 2a ed.,  
McGraw-Hill (1992).
- Hewlett Packard  
Test & Measurement Catalog (1998).
- Higbie, J.  
«Uncertainty in the linear regression slope», *Am. J. Phys.* **59**, 184-185 (1991).
- Kanare, H. M.  
*Writing the Laboratory Notebook*, American Chemical Society, Washington,  
(1985).
- Pallàs Areny, R.  
*Teoria Bàsica d'Errors*, Edicions Universitat Politècnica de Catalunya,  
Barcelona (1995).
- Papoulis, A. *Probability,*  
*Random Variables and Stochastic Processes*, 2a ed., McGraw-Hill (1984)
- Rabinovich, S.  
*Measurement Errors, Theory and Practice*, American Institute of Physics,  
New York (1995).
- Sánchez del Río, C.  
*Análisis de Errores*, Eudema Universidad, Madrid (1991).
- Schnell, L. *Technology*  
*of Electrical Measurements*, Wiley, New York (1993).
- Senent, F.  
*Instrucciones Generales de Laboratorio*, Departamento de Física Atómica,  
Molecular y Nuclear de la Universitat de València, València (1979).
- Spiridonov, V.P., y A.A. Lopatkin  
*Tratamiento Matemático de Datos Físico-Químicos*, Mir, Moscú (1983).
- Squires, G.L.  
*Practical Physics*, Cambridge Univ. Press (1985).
- Taylor, J. R.  
*An Introduction to Error Analysis*, University Science Books (1982).

---

# Índex

---

- Ajust, iii, 9, 18, 41, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 61, 72, 74, 75, 76, 77
- Covariància, 43
- Desviació de les dades, 37
- Desviació estàndard, 14, 37, 38, 41, 42, 43, 74, 75
- Dispersió de dades, iii, 10, 11, 12, 20, 32, 37, 42, 44, 45, 49, 52
- Distribució
  - límit, 37, 39
  - normal, 38, 39, 40, 42, 45
- Error
  - absolut, 20, 21, 22, 23, 27, 30, 35, 46, 68, 79
  - aleatori, iii, 10, 17, 19
  - barra d', 71
  - d'escala, 31, 34
  - en mesura indirecta, 24, 25, 26, 28, 52
  - relatiu, iii, 19, 21, 23, 27, 35
  - sistemàtic, 18, 19, 20
- Gràfic
  - histograma, 36, 37, 40, 44, 75
- Incertesa, iii, 10, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 28, 31, 32, 33, 34, 41, 43, 44, 45, 49, 75, 78
  - dels instruments, 34
  - en mesura indirecta, 24, 25, 26, 28, 42, 43, 44, 52
- Mesura
  - directa, 31, 32, 43
  - indirecta, 24, 29, 42, 48
  - múltiple, 40, 41, 80
  - resolució de la, 2, 21
  - única, 34, 36, 45
- Mitjana, 12, 14, 15, 16, 18, 31, 32, 34, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 75, 80
- Model, iii, 6, 7, 8, 9, 20, 32, 36, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 65, 67, 70, 72, 74, 75
  - Variable dependent, 47, 52
  - Variable dependent en un, 47, 52
  - Variable independent, 47, 58, 68
  - Variable independent en un, 47, 58, 68
- Notació científica, 22, 23
- Paràmetre, 7, 8, 14, 17, 28, 35, 37, 38, 40, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 65, 67, 68, 72, 75
- Paràmetres, 7, 8, 28, 35, 37, 38, 40, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 65, 67, 72, 75
- Sistema ergòdic, 16
- Tolerància, 10, 18
- Valor
  - acceptat, 20, 21, 22, 27, 34, 41, 43, 44, 45, 79
  - acurat, 19
  - esperat, 40
  - precís, 19, 27, 33, 46
- Variable aleatòria, 13, 14, 15, 16, 36, 40
  - correlació, 16, 25, 52, 53
  - fluctuacions, iv, 12, 13, 14, 16, 20, 22, 31, 32, 33, 34, 37, 74
  - soroll, 7, 17, 33
- Variància, 38, 42
- Xifres significatives, 21, 22, 23, 56, 57, 68, 79